

М. Ф. Бабаков, И. К. Васильева, А. В. Попов

**ФИЗИКО-ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ ПРОЕКТИРОВАНИЯ
РАДИОЭЛЕКТРОННЫХ СРЕДСТВ**

2015

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ УКРАИНЫ
Национальный аэрокосмический университет им. Н. Е. Жуковского
"Харьковский авиационный институт"

М. Ф. Бабаков, И. К. Васильева, А. В. Попов

**ФИЗИКО-ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ ПРОЕКТИРОВАНИЯ
РАДИОЭЛЕКТРОННЫХ СРЕДСТВ**

Учебное пособие по лабораторному практикуму

Харьков «ХАИ» 2015

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ УКРАИНЫ
Национальный аэрокосмический университет им. Н. Е. Жуковского
"Харьковский авиационный институт"

М. Ф. Бабаков, И. К. Васильева, А. В. Попов

**ФИЗИКО-ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ ПРОЕКТИРОВАНИЯ
РАДИОЭЛЕКТРОННЫХ СРЕДСТВ**

Учебное пособие по лабораторному практикуму

Харьков «ХАИ» 2015

УДК 621.396.001.63(076.5)

ББК 32я73

Б12

Наведено лабораторні роботи з курсу «Фізико-теоретичні основи проектування радіоелектронних засобів», що входять до програми підготовки бакалаврів за напрямом «Радіоелектронні апарати». У текстах описів лабораторних робіт викладено необхідні теоретичні відомості, постановку задач, методику виконання робіт. Розглянуто методи і алгоритми цифрового моделювання у задачах аналізу надійності технічних об'єктів, визначення полів допусків на вихідні параметри і елементи електронних засобів, знаходження оцінок показників безвідмовності. Описано методику планування, проведення й оброблення даних повного факторного експерименту. Особливу увагу приділено практичним питанням реалізації алгоритмів у пакеті Mathcad.

Для студентів факультету радіотехнічних систем літальних апаратів.

Рецензенты: д-р техн. наук, проф. Р. Э. Пащенко,
канд. техн. наук, доц. А. И. Горб

Бабаков, М. Ф.

Б12 Физико-теоретические основы проектирования радиоэлектронных средств [Текст] : учеб. пособие по лаб. практикуму / М. Ф. Бабаков, И. К. Васильева, А. В. Попов. – Х. : Нац. аэрокосм. ун-т им. Н. Е. Жуковского "Харьк. авиац. ин-т", 2015. – 84 с.

ISBN 978-966-662-422-5

Приведены лабораторные работы по курсу «Физико-теоретические основы проектирования радиоэлектронных средств», которые входят в программу подготовки бакалавров по направлению «Радиоэлектронные аппараты». В текстах описаний лабораторных работ изложены необходимые теоретические сведения, постановка задач, методика выполнения работ. Рассмотрены методы и алгоритмы цифрового моделирования в задачах анализа надежности технических объектов, определения полей допусков на выходные параметры и элементы электронных средств, нахождения оценок показателей безотказности. Описана методика планирования, проведения и обработки данных полного факторного эксперимента. Особое внимание уделено практическим вопросам реализации алгоритмов в пакете Mathcad.

Для студентов факультета радиотехнических систем летательных аппаратов.

Ил. 45. Табл. 10. Библиогр.: 11 назв.

УДК 621.396.6

ББК 32я73

© Бабаков М. Ф., Васильева И. К.,
Попов А. В., 2015

© Национальный аэрокосмический
университет им. Н. Е. Жуковского

"Харьковский авиационный институт", 2015

ISBN 978-966-662-422-5

Лабораторная работа № 1

ИССЛЕДОВАНИЕ МОДЕЛЕЙ ВНЕЗАПНОГО И ДЕГРАДАЦИОННОГО ОТКАЗОВ

Цель работы:

- изучить основные модели отказов, числовые характеристики безотказности и их статистические оценки;
- изучить методику и получить навыки моделирования отказов;
- получить навыки статистической обработки данных об отказах.

Необходимые теоретические сведения

Условия работоспособности (отказа) любого элемента можно представить в виде соотношений

$$\mathbf{H} < \mathbf{\Pi}, \quad (1.1)$$

$$x_{\text{д}} < x, \quad (1.2)$$

где $\mathbf{\Pi}$ – обобщенная прочность (тепловая, механическая, электрическая и т.п.); \mathbf{H} – обобщенная нагрузка; x – значение определяющего параметра; $x_{\text{д}}$ – его допустимое значение. Соотношение (1.1) соответствует условию отказа по схеме "нагрузка – прочность"; а (1.2) – параметрическому условию отказа. Параметры $\mathbf{\Pi}$, \mathbf{H} , x в выражениях (1.1), (1.2) могут быть случайными величинами или процессами. Их свойства определяют модели внезапных, постепенных и деградационных отказов.

Модель внезапного отказа

Отказ называется внезапным, если его невозможно предусмотреть предварительными исследованиями или техническим осмотром. Математически условие внезапного отказа представляют в виде

$$x(t) > x_{\text{д}}, \quad (1.3)$$

где $x(t)$ – нормальный стационарный случайный процесс нагружения или изменения определяющего параметра, $x_{\text{д}}$ – постоянное допустимое значение прочности или определяющего параметра.

При условии (1.3) моделью отказа является пересечение уровня $x_{\text{д}}$ первым выбросом процесса $x(t)$. Последовательность моментов пересечений образует поток случайных событий. Если уровень $x_{\text{д}}$ существенно превышает математическое ожидание \bar{x} процесса $x(t)$ так, что выбросы наблюдаются редко, то поток называют простейшим. Он характеризуется следующими свойствами:

1) стационарностью – вероятность появления определенного числа γ событий в интервале $[t, t + \tau]$ зависит только от длительности интервала τ , а не от момента времени t ;

2) ординарностью – вероятность появления двух или более событий в элементарном интервале времени Δt пренебрежимо мала по сравнению с вероятностью возникновения одного события;

3) отсутствием последействия – в любых неперекрывающихся временных интервалах количество событий, попадающих в один из них, не зависит от количества событий, попадающих в другие интервалы.

Для простейшего потока случайных событий вероятность появления ровно k событий за время t определяется законом Пуассона

$$P_k(t) = \frac{(\bar{n}_x \cdot t)^k}{k!} \cdot \exp(-\bar{n}_x \cdot t), \quad (1.4)$$

где \bar{n}_x – среднее число пересечений уровня x_d в единицу времени.

Вероятность безотказной работы соответствует отсутствию пересечений за время t ($k = 0$), т.е.

$$P(t) = P_0(t) = \exp(-\bar{n} \cdot t). \quad (1.5)$$

При этом плотность распределения времени до отказа

$$f(t) = \lambda \cdot \exp(-\lambda \cdot t), \quad (1.6)$$

а функция распределения

$$F(t) = 1 - P(t) = 1 - \exp(-\lambda \cdot t). \quad (1.7)$$

Выражения (1.5) – (1.7) соответствуют экспоненциальному закону надежности.

Модель деградиционного отказа

Множество физико-химических процессов, протекающих в элементах, приводит к деградации их свойств, что вызывает изменение определяющего параметра элемента x по случайному нестационарному закону $x(t)$, подчиняющемуся стохастическому дифференциальному уравнению

$$dx(t) = a \cdot dt + b \cdot dn(t), \quad (1.8)$$

где a – средняя скорость изменения параметра; b^2 – средняя скорость изменения дисперсии определяющего параметра; $n(t)$ – гауссовский случайный процесс.

Время до пересечения уровня x_d процессом $x(t)$ (время до отказа) является непрерывной случайной величиной, которая характеризуется плотностью распределения вероятностей $f(t)$.

В зависимости от характера процесса деградации выделяют два вида закона распределения времени наработки до отказа $f(t)$: диффузионное

немонотонное (DN) и диффузионное монотонное (DM).

Преобладающими механизмами отказов изделий электронной техники (ИЭТ) являются процессы старения и усталости, а также различные электрохимические процессы. При этом реализации процесса деградации носят немонотонный характер, поэтому закон распределения наработок до отказа имеет вид DN-распределения:

$$f(t) = \frac{1}{b \cdot t \cdot \sqrt{2\pi \cdot t}} \exp\left(-\frac{(1-a \cdot t)^2}{2 \cdot b^2 \cdot t}\right). \quad (1.9)$$

В механических изделиях, преобладающими механизмами отказов которых являются необратимые процессы изнашивания, усталости и коррозии, процессы деградации носят монотонный характер (непрерывное накопление повреждений), поэтому закон распределения наработок до отказа имеет вид DM-распределения:

$$f(t) = \frac{1+a \cdot t}{2 \cdot b \cdot t \cdot \sqrt{2\pi \cdot t}} \exp\left(-\frac{(1-a \cdot t)^2}{2 \cdot b^2 \cdot t}\right). \quad (1.10)$$

Деградационные отказы могут быть как внезапными, так и постепенными (параметрическими).

Показатели безотказности

С плотностью распределения $f(t)$ времени до отказа связаны следующие показатели безотказности:

1) вероятность безотказной работы за время t

$$P(t) = \int_t^{\infty} f(t) dt = 1 - \int_0^t f(t) dt; \quad (1.11)$$

2) среднее время безотказной работы

$$T = \int_0^{\infty} t \cdot f(t) dt = \int_0^{\infty} P(t) dt; \quad (1.12)$$

3) интенсивность отказов в момент времени t

$$\lambda(t) = \frac{f(t)}{P(t)} = -\frac{P'(t)}{P(t)}. \quad (1.13)$$

Статистические оценки показателей безотказности

Если проведено наблюдение наработок до отказа n изделий, то по значениям t_i ($i=1...n$) могут быть получены точечные статистические оценки показателей безотказности:

1) плотности распределения времени до отказа в момент t

$$\hat{f}(t) = \frac{r(t, t + \Delta t)}{n \cdot \Delta t}; \quad (1.14)$$

2) вероятности безотказной работы за время t

$$\hat{P}(t) = 1 - \frac{r(t)}{n}; \quad (1.15)$$

3) среднего времени работы до отказа

$$\hat{T} = \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^n t_i; \quad (1.16)$$

4) интенсивности отказов в момент времени t

$$\hat{\lambda}(t) = \frac{r(t, t + \Delta t)}{[n - r(t)] \cdot \Delta t}. \quad (1.17)$$

В формулах (1.14) – (1.17) использованы следующие обозначения: $r(t, t + \Delta t)$ – число отказов, зафиксированных в небольшом интервале $[t, t + \Delta t]$ (количество наработок t_i , попавших в этот интервал); $r(t)$ – общее число отказов, зафиксированных до момента времени t .

Постановка задачи лабораторной работы

В лабораторной работе необходимо:

1) выполнить цифровое моделирование процессов возникновения внезапных и деградационных отказов и сформировать выборку данных о наработках до отказа t_i ($i = 1 \dots n$);

2) построить гистограммы распределений наработок по этим видам отказов и проверить гипотезы о приемлемости соответствующих распределений для их описания;

3) получить точечные оценки параметров распределений и показателей безотказности;

4) построить графики характеристик безотказности.

Моделирование внезапных отказов

Моделирование внезапного отказа можно рассматривать как процесс сравнения уровня сигнала на выходе генератора случайного шума $\mathbf{H}(t)$ с заданным постоянным уровнем прочности Π объекта. Момент времени, при котором значение случайной нагрузки превысит уровень прочности, регистрируется как момент наступления отказа, а временной интервал от момента начала моделирования до момента регистрации отказа фиксируется как текущая реализация случайного времени наработки до внезапного отказа (рис. 1.1). Затем моделирование повторяется до получения заданного объема выборочных значений.

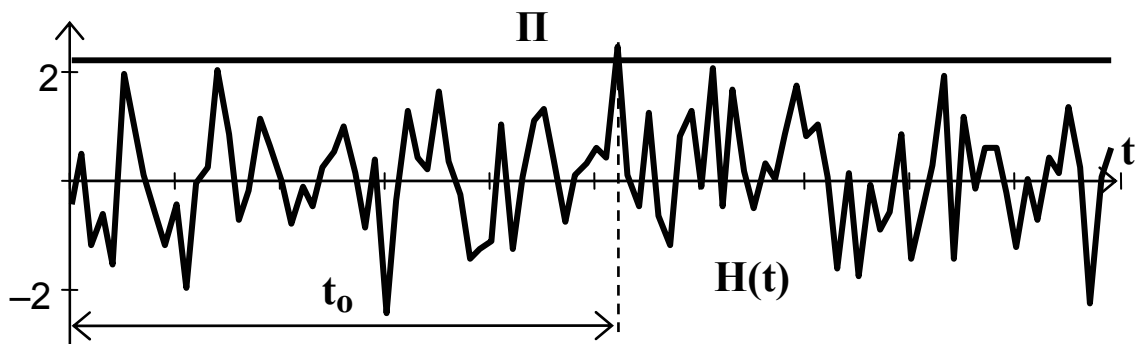


Рис. 1.1. Аналоговая схема моделирования внезапных отказов

На рис. 1.2 показана блок-схема алгоритма цифрового моделирования реализаций случайного времени наработки до внезапного отказа $\{t_i\}$, $i = 0 \dots M - 1$.

Этот алгоритм содержит два цикла: внешний (безусловный) – по заданному объему выборки M и внутренний (условный) – по выполнению условия наступления внезапного отказа (см. формулу (1.1)).

Переменная k – номер текущего отсчета машинного времени от начала моделирования до момента регистрации отказа; параметр Δt определяет величину шага изменения машинного времени (можно принять $\Delta t = 1$, тогда $t_i = k$).

Нагрузка является нормально распределенной случайной величиной. Как известно, для формирования нормальных последовательностей с математическим ожиданием m и среднеквадратическим отклонением (СКО) σ применяют метод композиции n независимых реализаций ($n > 10$) стандартной величины r , равномерно распределенной в интервале $[0, 1]$:

$$m + \sigma \cdot \sqrt{\frac{12}{n}} \cdot \left(\sum_{j=1}^n r_j - \frac{n}{2} \right). \quad (1.18)$$

Такой подход основан на центральной предельной теореме теории вероятностей.

Поскольку в рассматриваемом случае длина нормальной последовательности зависит от случайного номера реализации нагрузки в момент наступления отказа по условию (1.1), то для генерирования значения нагрузки в каждый момент времени следует сформировать функцию вида

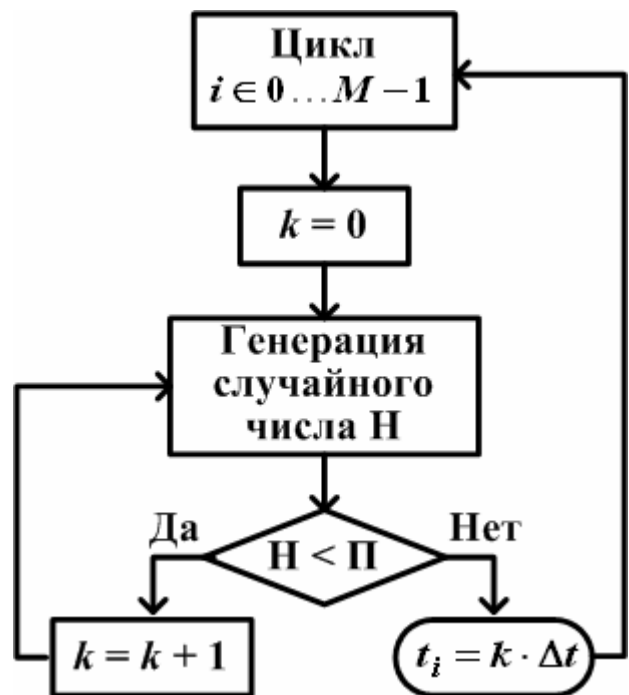


Рис. 1.2. Блок-схема алгоритма моделирования времени наработки до внезапного отказа

$$\text{norm}(z) = \left(\sum_{j=1}^{48} r_j - 24 \right) / 2, \quad (1.19)$$

при этом $m = 0$, $\sigma = 1$ и $n=48$.

Схемы моделирования деградационных отказов (рис. 1.3, 1.4) отличаются от алгоритма моделирования внезапных отказов введением блока формирования процесса деградации (1.8).

Условие снижения с течением времени уровня прочности математически эквивалентно условию повышения среднего уровня случайного процесса нагрузки, поэтому прочность Π объекта можно задавать константой, а для представления процесса немонотонной деградации необходимо, чтобы математическое ожидание случайного процесса $H(t)$ являлось линейно возрастающей функцией времени

$$M\{H(t)\} = m(t) = \alpha \cdot t,$$

где коэффициент α ($\alpha > 0$) характеризует скорость изменения (роста) среднего уровня нагрузки (рис. 1.3). Очевидно, что при этом расстояние между уровнем прочности и средним уровнем нагрузки в каждый последующий момент времени будет меньше, чем в предыдущий, что соответствует характеру деградационного процесса.

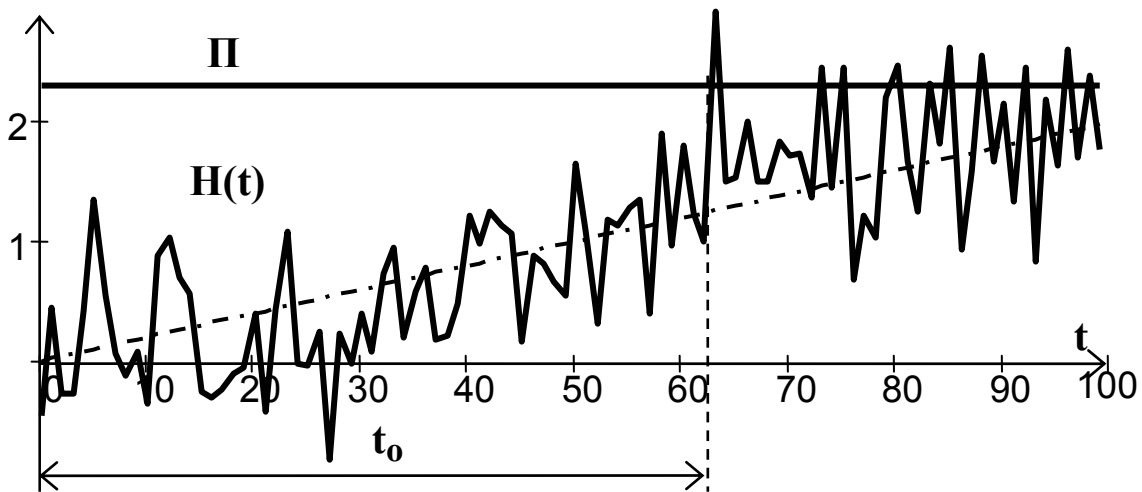


Рис. 1.3. Схема моделирования отказов при немонотонной деградации

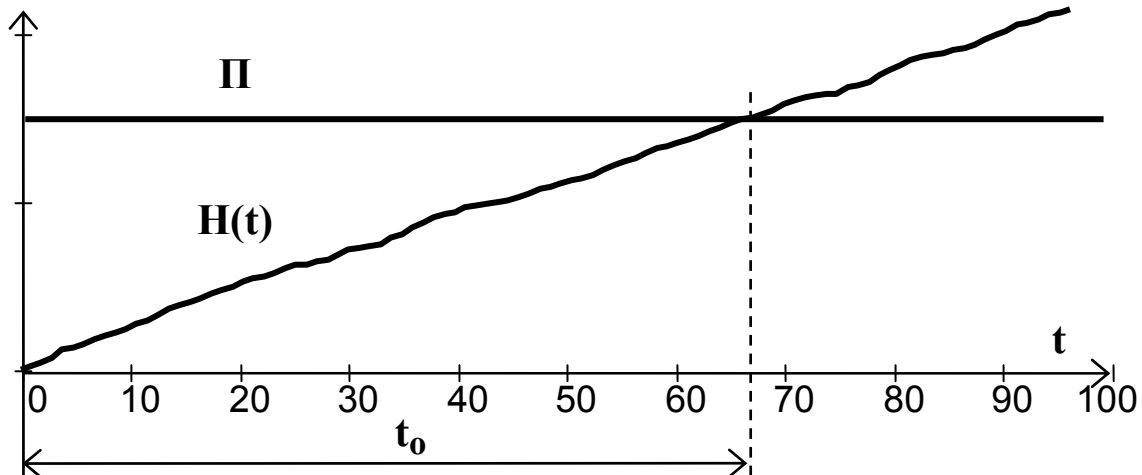


Рис. 1.4. Схема моделирования отказов при монотонной деградации

Для того, чтобы учесть монотонный характер деградации при постепенном накоплении повреждений, текущее значение случайной нагрузки будем определять как накопленную сумму всех предыдущих значений нагрузки по алгоритму

$$\sum_{j=0}^i \{ \beta \cdot H(t_j) + C \}, \quad i = 0, 1, 2, \dots,$$

где коэффициент β определяет величину разброса случайных значений нагрузки; C – параметр смещения, который нужен для того, чтобы избежать компенсации до нуля при суммировании нормальной последовательности с нулевым средним:

если $M\{H(t)\} = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T H(t) dt = 0$, то $\lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{j=0}^N H(t_j) = 0$.

Таким образом, результирующий случайный процесс будет монотонно возрастающим (в смысле статистически среднего) (см. рис. 1.4.).

На рис. 1.5 показаны блок-схемы алгоритмов моделирования времени наработки до отказа при немонотонной и монотонной деградации.

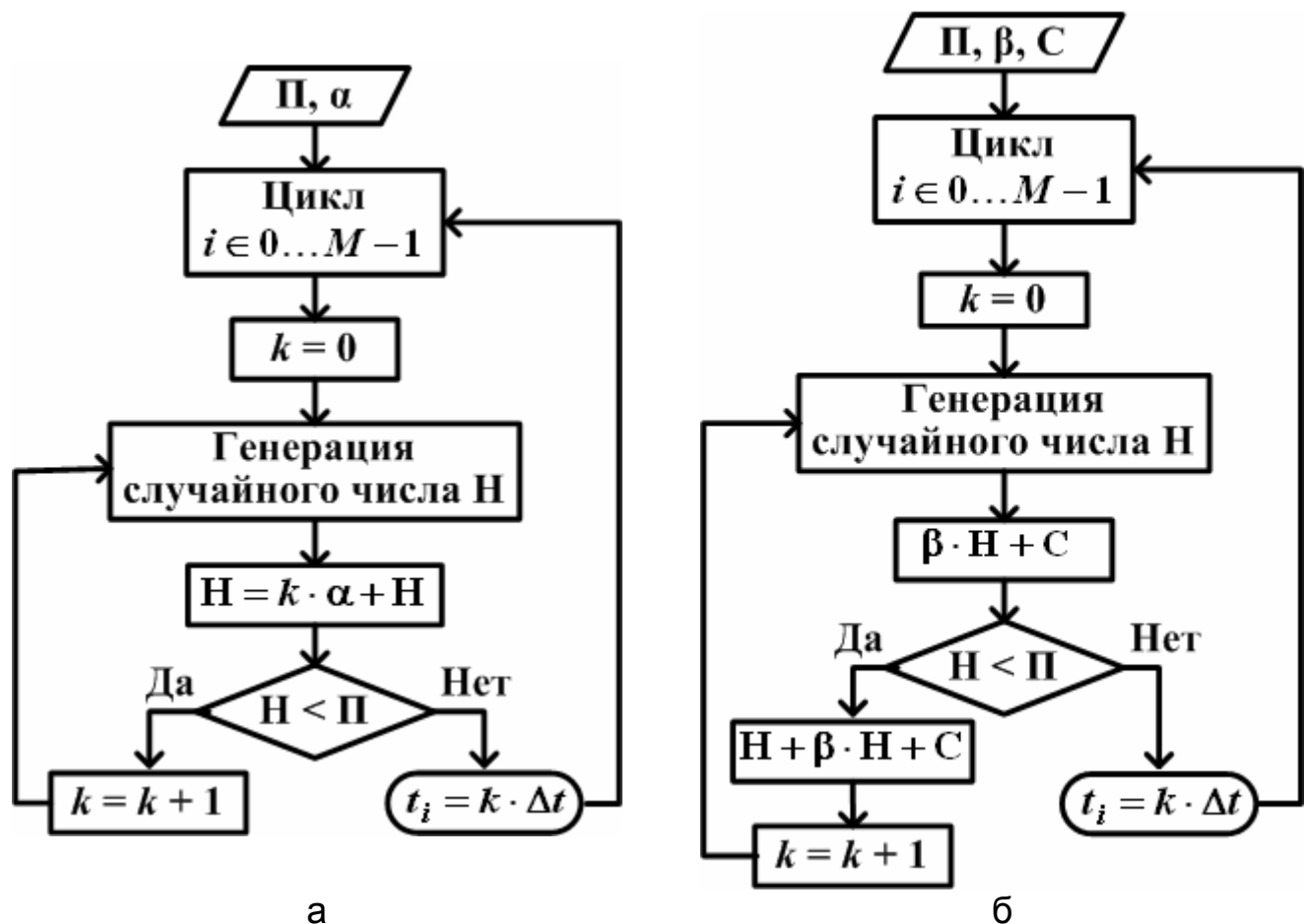


Рис. 1.5. Блок-схемы алгоритмов моделирования случайного времени наработки до деградационного отказа: а – немонотонная деградация; б – монотонная деградация

Порядок выполнения работы

Работу выполняют в пакете Mathcad. Моделирование данных по внезапным и деградиционным отказам и статистическую обработку результатов следует выполнять в разных файлах; для организации передачи данных используют встроенные функции чтения-записи в файл.

1. Моделирование

Задаем требуемый объем выборок M от 200 до 500, например
 $M := 300$

Значения параметров моделирования Π , α , β , C устанавливаем в соответствии с заданным вариантом (прочность Π – глобальная переменная, коэффициенты α , β и C – аргументы функций-генераторов случайных наработок до отказа).

Определяем функцию-датчик стандартных нормальных чисел (1.18)

$$\mathbf{norm}(z) := \left(\sum_{j=1}^{48} \mathbf{rnd}(1) - 24 \right) \cdot \frac{1}{2}$$

Алгоритмы моделирования случайных значений времени наработки до отказа (см. рис. 1.2, 1.5) можно реализовать в Mathcad в виде подпрограмм-функций следующего вида:

– внезапные отказы:

$$\mathbf{ВН}(M) := \left| \begin{array}{l} \mathbf{for} \ i \in 0..M-1 \\ \quad \left| \begin{array}{l} \mathbf{k} \leftarrow 0 \\ \mathbf{while} \ \mathbf{norm}(\mathbf{k}) < \Pi \\ \quad \mathbf{k} \leftarrow \mathbf{k} + 1 \\ \mathbf{t}_i \leftarrow \mathbf{k} \end{array} \right. \\ \mathbf{t} \end{array} \right.$$

– отказы при деградации немонотонного типа:

$$\mathbf{DN}(M, \alpha) := \left| \begin{array}{l} \mathbf{for} \ i \in 0..M-1 \\ \quad \left| \begin{array}{l} \mathbf{k} \leftarrow 0 \\ \mathbf{while} \ (\mathbf{k} \cdot \alpha + \mathbf{norm}(\mathbf{k})) < \Pi \\ \quad \mathbf{k} \leftarrow \mathbf{k} + 1 \\ \mathbf{t}_i \leftarrow \mathbf{k} \end{array} \right. \\ \mathbf{t} \end{array} \right.$$

- отказы при деградации монотонного типа:

$$\begin{array}{l}
 \mathbf{DM}(\mathbf{M}, \beta, \mathbf{C}) := \left| \begin{array}{l}
 \mathbf{for} \ i \in 0.. \mathbf{M} - 1 \\
 \left| \begin{array}{l}
 \mathbf{k} \leftarrow 0 \\
 \mathbf{r} \leftarrow \mathbf{norm}(\mathbf{k}) \cdot \beta + \mathbf{C} \\
 \mathbf{while} \ r < \Pi \\
 \left| \begin{array}{l}
 \mathbf{k} \leftarrow \mathbf{k} + 1 \\
 \mathbf{r} \leftarrow \mathbf{r} + (\mathbf{norm}(\mathbf{k}) \cdot \beta + \mathbf{C})
 \end{array}
 \right. \\
 \mathbf{t}_i \leftarrow \mathbf{k}
 \end{array}
 \right. \\
 \mathbf{t}
 \end{array}
 \right.
 \end{array}$$

Для получения \mathbf{M} реализаций наработок до отказа по очереди вызываем функции генераторов, записываем данные в массив \mathbf{V} и сохраняем их в текстовых файлах (по умолчанию эти файлы будут находиться в рабочем каталоге; имена файлов должны быть разными):

$$\begin{array}{ll}
 \mathbf{V} := \mathbf{BH}(\mathbf{M}) & \mathbf{WRITEPRN}(\text{"BH.txt"}) := \mathbf{V} \\
 \mathbf{V} := \mathbf{DN}(\mathbf{M}, \alpha) & \mathbf{WRITEPRN}(\text{"DN.txt"}) := \mathbf{V} \\
 \mathbf{V} := \mathbf{DM}(\mathbf{M}, \beta, \mathbf{C}) & \mathbf{WRITEPRN}(\text{"DM.txt"}) := \mathbf{V}
 \end{array}$$

2. Статистическая обработка данных моделирования по внезапным отказам

Обработку данных по отказам различных типов рекомендуется проводить поочередно.

Создадим новый файл в Mathcad и запишем данные из соответствующего текстового файла в массив

$$\mathbf{V} := \mathbf{READPRN}(\text{"BH.txt"})$$

Определим размах \mathbf{RR} ряда наблюдений наработок до отказа. Для этого используем встроенные функции, возвращающие максимальный и минимальный элементы массива:

$$\mathbf{RR} := \mathbf{max}(\mathbf{V}) - \mathbf{min}(\mathbf{V})$$

Зададим количество интервалов гистограммы

$$\mathbf{K} := 30$$

Определим ширину интервалов гистограммы

$$\mathbf{h} := \frac{\mathbf{RR}}{\mathbf{K} - 1}$$

и найдем координаты начала и конца каждого интервала:

$$\mathbf{k} := 0.. \mathbf{K} \quad \mathbf{d}_k := \mathbf{h} \cdot \mathbf{k} + \mathbf{min}(\mathbf{V})$$

Подсчитаем количество попаданий наработок до отказа в k -й интервал разбиения с помощью функции $\mathbf{hist}(\mathbf{d}, \mathbf{V})$, которая возвращает абсолютную частоту попадания значений из массива \mathbf{V} в интервал $[\mathbf{d}_k, \mathbf{d}_{k+1}]$:

$$\mathbf{g} := \mathbf{hist}(\mathbf{d}, \mathbf{V})$$

Выведем значения \mathbf{g} на экран и посмотрим их (скорее всего придется использовать линейку прокрутки в области вывода результатов). Если количество попаданий в какой-то интервал оказалось менее пяти, то соседние интервалы необходимо объединить, а интервал с большим количеством попаданий можно разбить на меньшие интервалы.

Для автоматического объединения интервалов гистограммы в соответствии с требованием

$$\mathbf{g}_k \geq 5 \text{ при } k = 0 \dots \mathbf{K} - 1$$

нужно создать в Mathcad подпрограмму-функцию, которая должна решать такие задачи:

1. Сортировка элементов массивов \mathbf{g} и \mathbf{d} в обратном порядке. Это обусловлено тем, что чем больше значение реализации экспоненциального распределения, тем менее вероятно ее появление в выборке. Поэтому для начальных интервалов гистограммы количество попаданий относительно большое (при заданном объеме выборки $\mathbf{M} = 300$ и количестве интервалов гистограммы $\mathbf{K} = 30$ оно может составлять несколько десятков), а для интервалов, расположенных ближе к максимальной границе эмпирического распределения, количество попаданий может составлять не более одного - двух. Более того, возможно наличие «пустых» интервалов, в которые не попало ни одного из выборочных значений (очевидно, что последний интервал $[\mathbf{d}_{\mathbf{K}-1}, \mathbf{d}_{\mathbf{K}}]$ пустым быть не может). Поэтому целесообразно объединять интервалы, начиная с последнего и последовательно двигаясь к началу распределения.
2. Формирование накопленной суммы частот попаданий реализаций в соседние интервалы $\mathbf{g}_k + \mathbf{g}_{k+1} + \mathbf{g}_{k+2} + \dots$ до тех пор, пока не будет выполнено условие $\sum \mathbf{g}_k \geq 5$.
3. Сохранение нового (суммарного) значения количества попаданий в объединенные интервалы гистограммы, а также соответствующих координат границ нового (объединенного) интервала в массивах \mathbf{N} и \mathbf{T} длиной \mathbf{L} и $\mathbf{L} + 1$ соответственно, причем $\mathbf{L} < \mathbf{K}$. Для удобства вывода результатов массивы \mathbf{N} и \mathbf{T} можно объединить в одну матрицу размером $(\mathbf{L} + 1) \times 2$, но для этого они должны иметь одинаковую длину. Поэтому в массив $\mathbf{N} = \{\mathbf{N}_j\}$, $j = 0 \dots \mathbf{L} - 1$ следует дописать еще один элемент, равный нулю: $\mathbf{N}_0 = 0$.

Перечисленные задачи решает подпрограмма-функция **merger(g,d)**, текст которой приведен ниже.

```

merger(g , d) :=
  G ← reverse(g)
  D ← reverse(d)
  k ← 0
  i ← 0
  while i < last(G) + 1
    Nk ← Gi
    Tk ← Di
    while Nk < 5
      i ← i + 1
      Nk ← Nk + Gi
    k ← k + 1
    i ← i + 1
    Tk ← Di
  T ← reverse(T)
  N ← reverse(N)
  N ← stack(N, 0)
  M ← augment(N, T)

```

Подпрограмма использует следующие встроенные функции:

- **reverse(A)** – возвращает массив, в котором элементы вектора (или строки матрицы) расположены в обратном порядке;
- **stack(A,B,C,...)** – возвращает массив, образованный размещением элементов **A,B,C,...** сверху вниз. **A,B,C,...** – массивы с одинаковым количеством столбцов, векторы или скалярные величины;
- **augment(A,B,C,...)** – возвращает массив, образованный размещением элементов **A,B,C,...** слева направо. **A,B,C,...** – массивы с одинаковым количеством строк или скалярные величины.

После коррекции интервалов их характеристики (координаты начала t_{iH} и конца t_{iK} интервалов) и уточненное количество попаданий n_i в них необходимо представить в виде таблицы.

Например, получен массив $\{g_k\}$ — количество попаданий реализаций случайной величины в k -й интервал гистограммы (табл. 1.1).

Таблица 1.1

Статистический ряд наблюдений

k	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
g_k	60	44	32	34	23	16	16	17	11	7	10	8	9	3	3
k	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
g_k	1	2	0	0	1	1	0	0	0	0	1	0	0	0	1

При этом диапазон выборочных значений составляет от $\min(d) = 0$ до $\max(d) = 294.828$.

Как видим, требование $g_k \geq 5$ не выполняется, поэтому результаты обработки таких данных не будут статистически значимыми.

С помощью определенной выше подпрограммы-функции $\text{merger}(g, d)$ выполним последовательное объединение интервалов гистограммы, содержащих менее пяти выборочных значений:

$$\mathbf{HN} := \text{merger}(g, d)$$

Получим матрицу \mathbf{HN} , первый столбец которой $\mathbf{HN}^{(0)}$ содержит новые значения количества попаданий выборочных значений в укрупненные интервалы гистограммы (последний нулевой элемент столбца не учитываем), второй столбец $\mathbf{HN}^{(1)}$ — новые координаты границ интервалов после объединения.

Новое количество интервалов гистограммы

$$\mathbf{K} := \text{rows}(\mathbf{HN}) - 1 \quad \mathbf{K} = 15$$

Гистограмма — эмпирическая оценка плотности распределения вероятностей непрерывной случайной величины.

Высоту k -го столбца гистограммы находим по формуле

$$\hat{f}_k = \frac{n_k}{M \cdot \Delta t_k},$$

где n_k — количество попаданий в k -й интервал гистограммы (после их коррекции); M — объем выборки; Δt_k — ширина k -го интервала.

$$\mathbf{HN} =$$

60	0
44	9.828
32	19.655
34	29.483
23	39.310
16	49.138
16	58.966
17	68.793
11	78.621
7	88.448
10	98.276
8	108.103
9	117.931
7	127.759
6	157.241
0	294.828

Определим ранжированные переменные: k – номер координаты границы интервала и j – номер интервала гистограммы:

$$k := 0 .. K \quad j := 0 .. K - 1$$

Сформируем массив количеств попаданий в интервалы гистограммы

$$n_j := (HN^{(0)})_j$$

Сумма элементов этого массива должна равняться объему выборки. Действительно,

$$\sum_j n_j = 300$$

Сформируем массив координат границ интервалов гистограммы t_G , а также массивы координат начала t_H и конца t_K каждого интервала:

$$t_G := HN^{(1)} \quad t_{H_j} := (HN^{(1)})_j \quad t_{K_j} := (HN^{(1)})_{j+1}$$

Найдем значения ширины интервалов

$$\Delta t_j := t_{K_j} - t_{H_j}$$

Для данных, приведенных выше в качестве примера, эти массивы имеют вид

$\mathbf{n} =$	60		$\Delta \mathbf{t} =$	9.83		$\mathbf{t}_H =$	0		$\mathbf{t}_K =$	9.83
	44			9.83			9.83			19.66
	32			9.83			19.66			29.48
	34			9.83			29.48			39.31
	23			9.83			39.31			49.14
	16			9.83			49.14			58.97
	16			9.83			58.97			68.79
	17			9.83			68.79			78.62
	11			9.83			78.62			88.45
	7			9.83			88.45			98.28
	10			9.83			98.28			108.1
	8			9.83			108.1			117.93
	9			9.83			117.93			127.76
	7			29.48			127.76			157.24
	6			137.59			157.24			294.83

Определим эмпирические оценки плотности распределения вероятности попадания в интервалы гистограммы

$$f_{0j} := \frac{n_j}{M \cdot \Delta t_j}$$

Для корректного построения гистограммы высоту эмпирического распределения в точке конца последнего интервала приравняем нулю

$$f_{0K} := 0$$

Гистограмма распределения, построенная по данным примера, показана на рис. 1.6 (тип линий графика – step).

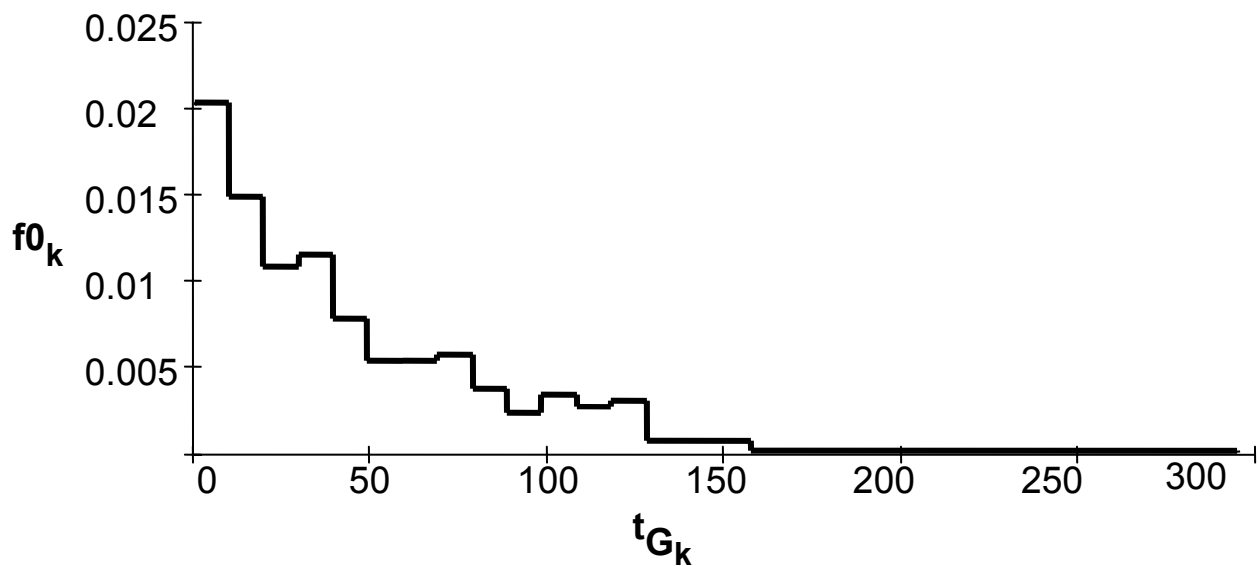


Рис. 1.6. Гистограмма распределения данных наблюдений по внезапным отказам

Для сравнения первоначальный вид гистограммы, построенной непосредственно по данным табл. 1.1, изображен на рис. 1.7.

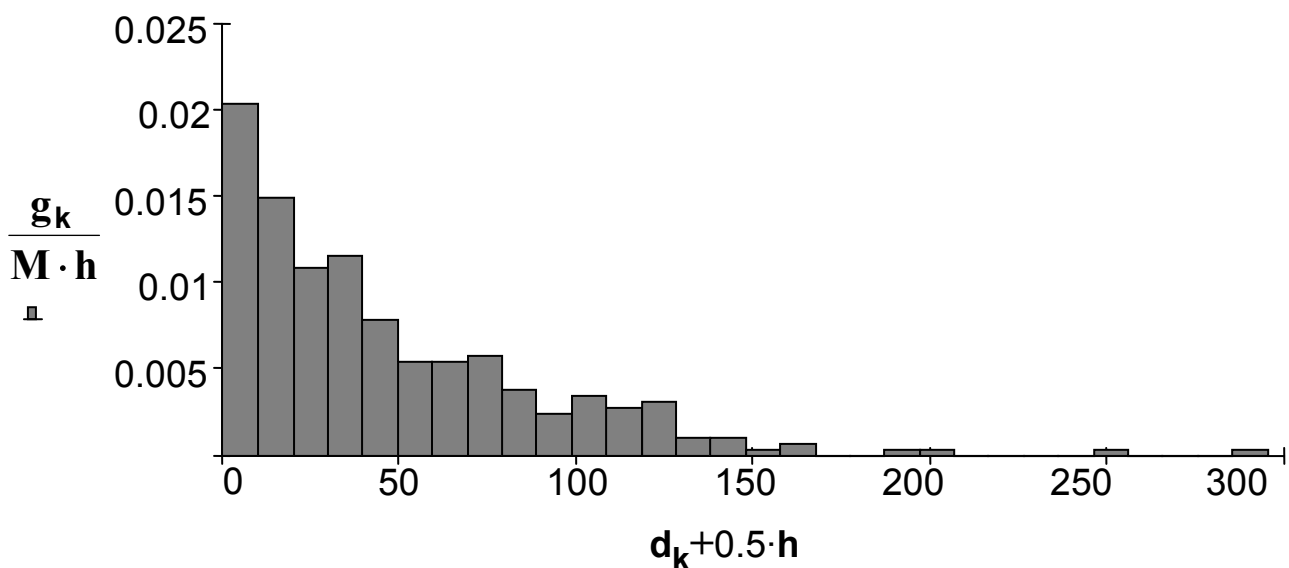


Рис. 1.7. Гистограмма распределения, построенная по данным табл. 1.1

Рассчитаем оценку средней наработки до отказа по формуле

$$\hat{m} = \hat{T} = \frac{1}{M} \cdot \sum_{i=0}^{M-1} t_{oi},$$

где t_{oi} – выборочные значения наработок до отказа (эти значения находятся в массиве с именем V); для нахождения средней наработки до отказа можно использовать встроенную функцию **mean(•)**:

$$T := \text{mean}(V)$$

В рассматриваемом примере

$$T = 46.153$$

Формулы для определения несмещенной оценки дисперсии \hat{D} и среднеквадратического отклонения $\hat{\sigma}$ случайной величины t_o имеют вид

$$\hat{D} = \frac{1}{M-1} \cdot \sum_{i=0}^{M-1} (t_{oi} - \hat{T})^2,$$

$$\hat{\sigma} = \sqrt{\hat{D}}.$$

Для получения оценки СКО можно использовать функцию **Stdev(•)**:

$$\sigma := \text{Stdev}(V)$$

В данном примере

$$\sigma = 44.049$$

Вид гистограммы распределения, а также сравнение полученных величин T и σ , которые различаются незначительно ($< 5\%$), позволяют сделать вывод об экспоненциальном характере распределения результатов моделирования наработки до отказа (как известно, для экспоненциального распределения справедливо равенство $m = \sigma$).

Оценим параметр λ экспоненциального распределения:

$$\lambda := \frac{1}{T}$$

Определим функцию для расчета плотности экспоненциального распределения

$$fe(z) := \lambda \cdot e^{-\lambda \cdot z}$$

Зададим число точек для построения графика плотности распределения N и рассчитаем координаты точек графика по оси абсцисс:

$$N := 100 \quad i := 0 .. N-1$$

$$x_i := \frac{RR}{N-1} \cdot i$$

(RR – размах выборочных значений).

Построим график плотности экспоненциального распределения $fe(x_i)$, совместив его с гистограммой f_0 , как показано на рис. 1.8.

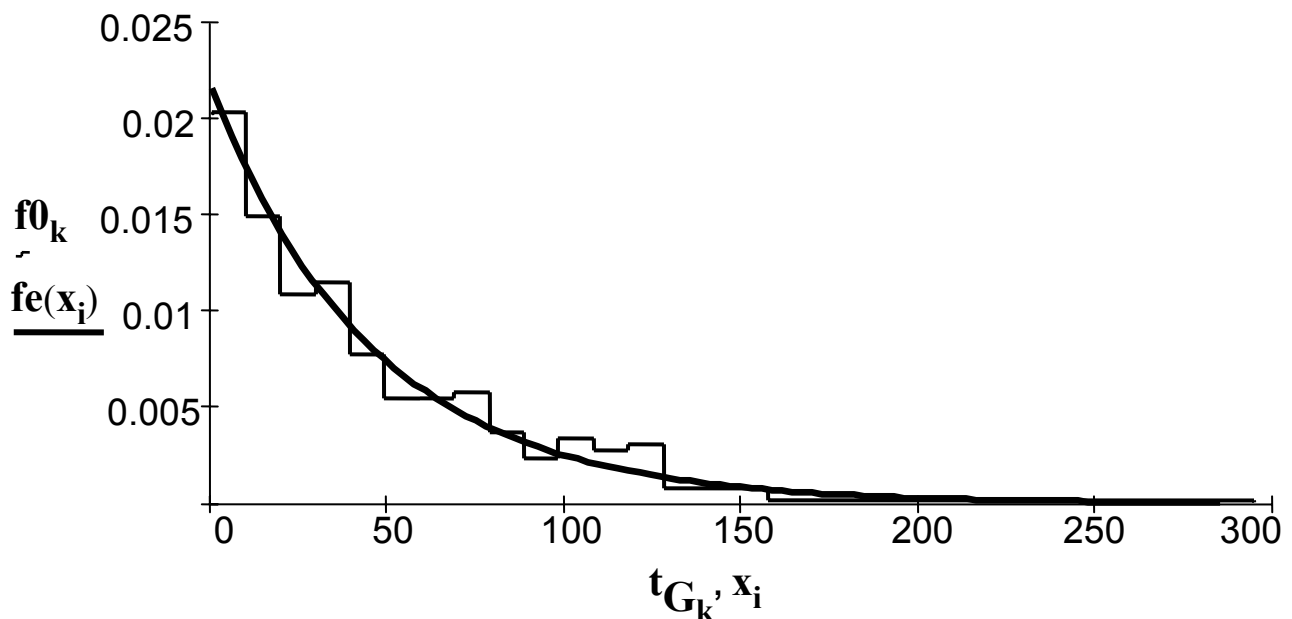


Рис. 1.8. Гистограмма распределения данных наблюдений по внезапным отказам и теоретическая плотность экспоненциального распределения

Проверим гипотезу о приемлемости экспоненциального распределения для описания времени наработки до внезапного отказа.

Рассчитаем теоретическую вероятность попадания случайной наработки в интервал гистограммы:

$$P_j := \int_{t_{G_j}}^{t_{G_{j+1}}} fe(z) dz$$

Найдем значение критерия согласия

$$\chi^2 := \sum_j \frac{(n_j - M \cdot P_j)^2}{M \cdot P_j}$$

Например, при проверке соответствия эмпирического распределения, показанного на рис. 1.8, экспоненциальному закону получим

$$\chi^2 = 12.691$$

Рассчитанное значение критерия необходимо сравнить с квантилем χ^2 -распределения $\chi_{\text{табл}}^2(\tau, \alpha)$, который определяется заданной вероятностью ошибки α (уровнем значимости гипотезы о виде распределения) и числом степеней свободы $\tau = K - 1 - \theta$, где K – количество интервалов гистограммы; θ – количество параметров теоретического распределения, оцениваемых по выборке. Единицу вычитают всегда в силу условия нормировки $\sum_{k=1}^K \hat{f}_k(x) = 1$. Если $\chi^2 \leq \chi_{\text{табл}}^2(\tau, \alpha)$, то теоретическое и эмпирическое распределения не противоречат друг другу с вероятностью

$P = 1 - \alpha$. В противном случае гипотезу отвергают как неправдоподобную.

Определим число степеней свободы χ^2 -распределения (в рассматриваемом случае $K = 15$ и $\theta = 1$)

$$\tau := K - 1 - 1 \quad \tau = 13$$

Чтобы найти вероятность правильного решения относительно вида распределения, используем функцию $\text{pchisq}(\mathbf{x}, \tau)$, возвращающую значение интегральной функции χ^2 -распределения с числом степеней свободы τ , вычисленное в точке \mathbf{x} :

$$1 - \text{pchisq}(\chi^2, \tau) = 0.472$$

Необходимо отметить, что критерий χ^2 применяют при числе интервалов $K > 15$. Поэтому вывод в данном случае не строго обоснован.

Рассчитаем оценки значений вероятности безотказной работы $P(t_{ik})$ в моменты времени t_{ik} по уравнению

$$\hat{P}(t_{ik}) = 1 - \frac{1}{M} \cdot \sum_{j=1}^i n_j,$$

где величина $\sum_{j=1}^i n_j$ равна общему количеству отказов, зарегистрированных к моменту окончания i -го интервала.

Например, в момент времени $t_{3к}$

$$\hat{P}(t_{3к}) = 1 - \frac{1}{M} \cdot (n_1 + n_2 + n_3).$$

Формулу для оценки $P(t_{ik})$ в Mathcad запишем так:

$$P_{0j} := 1 - \frac{1}{M} \cdot \sum_{i=0}^j n_i$$

Рассчитаем оценки интенсивности отказов в моменты времени t_{ih} :

$$\hat{\lambda}(t_{ih}) = \frac{n_i}{\left[M - \sum_{j=0}^{i-1} n_j \right] \cdot \Delta t_i},$$

где величина $M - \sum_{j=0}^{i-1} n_j$ равна количеству неотказавших изделий к началу i -го интервала.

Например, в момент времени t_{3h}

$$\hat{\lambda}(t_{3h}) = \frac{n_3}{[M - (n_1 + n_2)] \cdot \Delta t_3}.$$

При расчете этой оценки в Mathcad будем применять формулу

$$\lambda_{0j} := \frac{n_j}{\left(M - \text{if} \left(j = 0, 0, \sum_{i=0}^{j-1} n_i \right) \right) \cdot \Delta t_j}$$

Условную функцию $\text{if}(\bullet, \bullet, \bullet)$ используем, чтобы не получить недопустимого (отрицательного при $j = 0$) номера элемента массива n_{j-1} .

Результаты оценок вероятности безотказной работы к моменту окончания i -го интервала и интенсивности отказов в начале i -го интервала представим графически, как показано на рис. 1.9, 1.10.

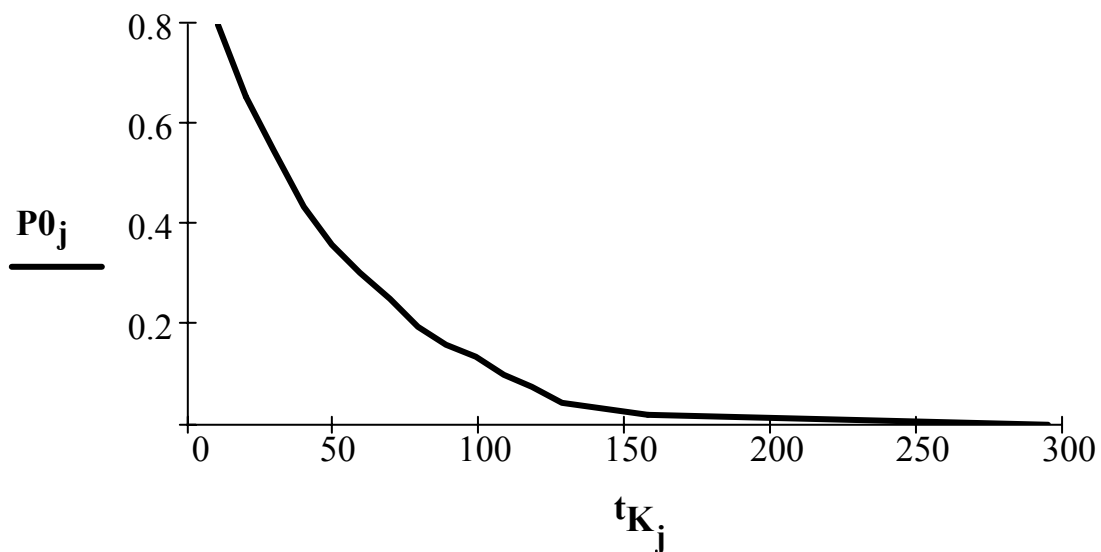


Рис. 1.9. Оценки вероятности безотказной работы к моменту окончания i -го интервала

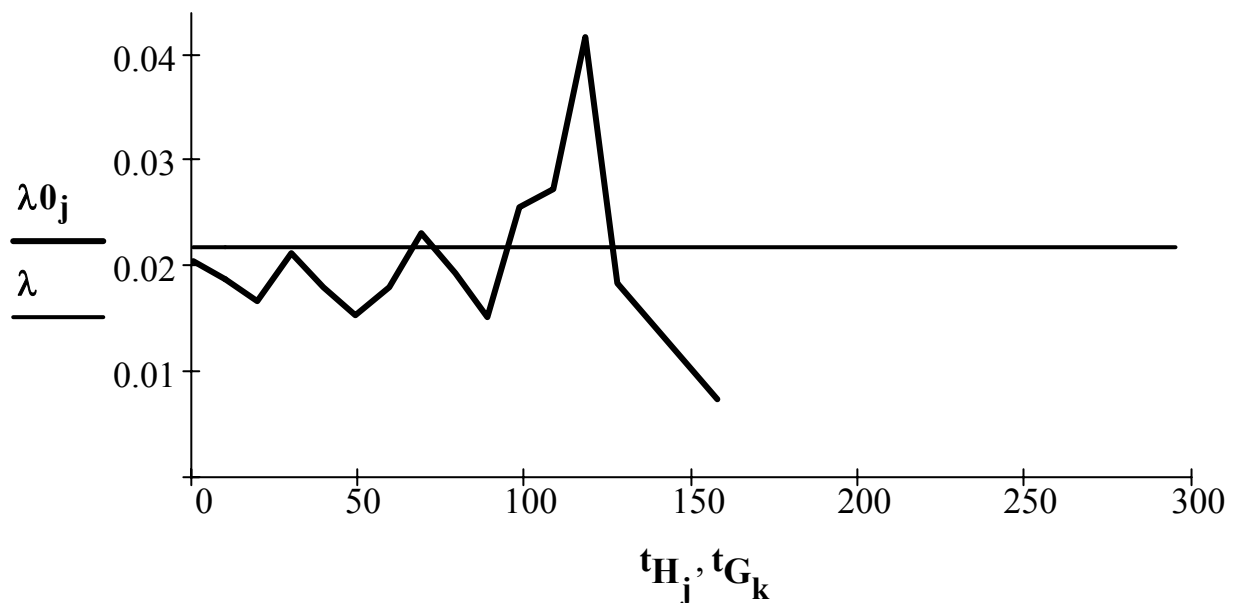


Рис. 1.10. Оценки интенсивности отказов в начале i -го интервала и средняя интенсивность отказов

При оформлении отчета о лабораторной работе результаты расчетов \hat{f}_i , $\hat{P}(t_{iK})$, $\hat{\lambda}(t_{iH})$ следует занести в табл. 1.2.

Таблица 1.2

Результаты обработки данных наблюдений внезапных отказов

Значения показателей	Интервалы				
	1	2	i	...	L
Координата начала интервала	t_{1H}	t_{2H}	t_{iH}	...	t_{LH}
Координата конца интервала	t_{1K}	t_{2K}	t_{iK}	...	t_{LK}
Количество попаданий	n_1	n_2	n_i	...	n_L
\hat{f}_i	\hat{f}_1	\hat{f}_2	\hat{f}_i	...	\hat{f}_L
$\hat{P}(t_{iK})$	$\hat{P}(t_{1K})$	$\hat{P}(t_{2K})$	$\hat{P}(t_{iK})$...	$\hat{P}(t_{LK})$
$\hat{\lambda}(t_{iH})$	$\hat{\lambda}(t_{1H})$	$\hat{\lambda}(t_{2H})$	$\hat{\lambda}(t_{iH})$...	$\hat{\lambda}(t_{LH})$

3. Статистическая обработка данных по деграционным отказам изделий электронной техники

Обработку данных наблюдений проводим в соответствии с п. 2.

Результаты обработки заносим в таблицу, аналогичную табл. 1.2.

Запишем данные моделирования времени наработки до отказа при немонотонной деградации из текстового файла в массив V .

Определим размах RR ряда наблюдений наработок до отказа.

Зададим начальное количество интервалов гистограммы $K = 30$, сформируем массив d , содержащий координаты границ интервалов, и с помощью функции $hist(d, V)$ подсчитаем количество попаданий реализаций в каждый интервал гистограммы. Убедимся, что требование $n_k \geq 5$, $k = 0 \dots K - 1$, не соблюдается.

С помощью подпрограммы-функции $merger(g, d)$ выполним коррекцию интервалов. Получим другие значения K (количество интервалов гистограммы), n_k (количество попаданий реализаций в интервалы) и новые координаты границ интервалов.

Найдем статистические оценки плотности распределения \hat{f}_k , средней наработки до отказа \hat{T} , дисперсии \hat{D} и СКО $\hat{\sigma}$.

Построим гистограмму распределения наработки до отказа и кривую плотности DN-распределения (см. выражение (1.9)), подставив вместо

параметров распределения a , b их статистические оценки:

$$\hat{a} = 1/\hat{T}; \quad (1.20)$$

$$\hat{b} = \frac{1}{\hat{\sigma} \cdot \sqrt{\hat{a}}}. \quad (1.21)$$

Чтобы построить график плотности DN-распределения, определим в Mathcad пользовательскую функцию

$$f(z) := \frac{1}{b \cdot z \cdot \sqrt{2 \cdot \pi \cdot z}} \cdot \exp\left[-\frac{(1 - a \cdot z)^2}{2 \cdot z \cdot b^2}\right]$$

В качестве аргумента этой функции следует использовать массив N точек, расположенных с равным шагом по оси абсцисс в диапазоне от небольшого положительного числа (чтобы исключить ошибку типа деления на ноль) до максимального выборочного значения, например:

$$x_i := 0.01 + \frac{RR}{N-1} \cdot i$$

Гистограмму распределения и плотность DN-распределения нужно построить на одном графике, как это показано на рис. 1.11.

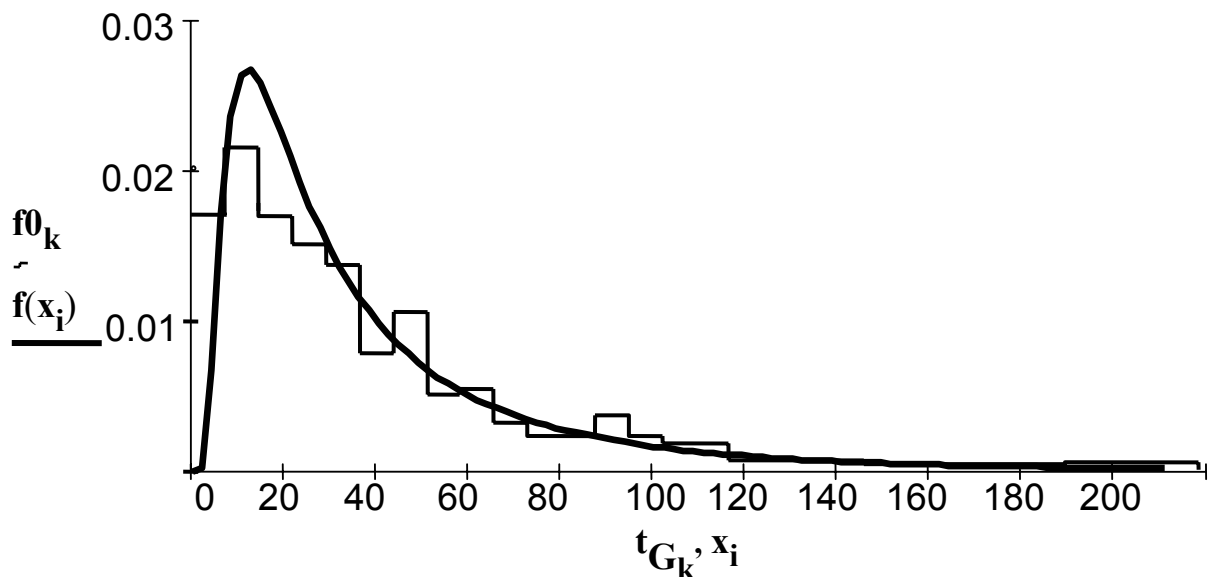


Рис. 1.11. Пример гистограммы распределения времени наработки до отказа при немонотонной деградации и плотность DN-распределения

Проверим гипотезу о приемлемости DN-распределения для описания данных моделирования.

Найдем оценки показателей надежности $\hat{P}(t_{iK})$, $\hat{\lambda}(t_{iH})$, $\hat{\lambda} = 1/\hat{T}$ и построим графики зависимости этих оценок от времени.

Полученные графики следует проанализировать и сделать выводы о характере изменения интенсивности отказов при немонотонной деградации по сравнению с экспоненциальным распределением.

4. Статистическая обработка данных по деградационным отказам механических элементов

Статистическую обработку данных выполним в соответствии с п. 2, 3. Результаты обработки занесем в таблицу, аналогичную табл. 1.2.

Найдем статистические оценки плотности распределения \hat{f}_k , средней наработки до отказа \hat{T} , дисперсии \hat{D} и СКО $\hat{\sigma}$.

По формулам (1.20), (1.21) оценим значения параметров a и b DM-распределения.

Определим в Mathcad пользовательскую функцию для расчета значений плотности DM-распределения (см. выражение (1.10)); в качестве значений параметров распределения примем их статистические оценки

$$f(z) := \frac{1 + a \cdot z}{2 \cdot b \cdot z \cdot \sqrt{2 \cdot \pi \cdot z}} \cdot \exp \left[-\frac{(1 - a \cdot z)^2}{2 \cdot z \cdot b^2} \right]$$

Совместим на одном графике гистограмму распределения наработки до отказа и кривую плотности DM-распределения (рис. 1.12).

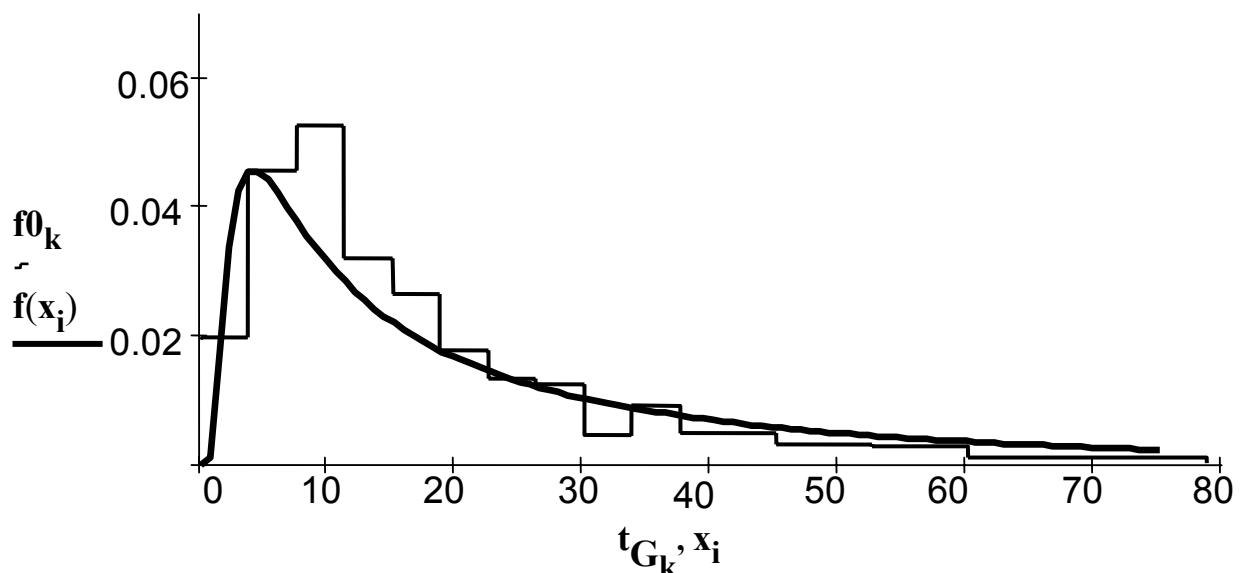


Рис. 1.12. Пример гистограммы распределения времени наработки до отказа при монотонной деградации и плотность DM-распределения

Проверим гипотезу о приемлемости DM-распределения для описания данных моделирования.

Найдем оценки показателей надежности $\hat{P}(t_{iK})$, $\hat{\lambda}(t_{iH})$, $\hat{\lambda} = 1/\hat{T}$ и построим графики зависимости этих оценок от времени.

Полученные графики показателей надежности следует сравнить с аналогичными для двух предыдущих видов отказов и сделать выводы о характере изменения интенсивности отказов с течением времени для всех исследуемых моделей отказов.

Содержание отчета

Отчет о лабораторной работе должен содержать:

- протокол данных моделирования (параметры моделирования наработок до внезапных и деградационных отказов приведены в табл. 1.3);
- таблицы с результатами обработки данных моделирования;
- соотношения для расчета основных характеристик безотказности;
- графики характеристик $f(t)$, $\hat{f}(t)$, $\hat{P}(t_{ик})$, $\hat{\lambda}(t_{ин})$, $\hat{\lambda} = 1/\hat{T}$;
- выводы по результатам лабораторной работы.

Таблица 1.3

Параметры моделирования

Параметр	Номер варианта									
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Π	2,05	2,10	2,15	2,20	2,25	2,30	2,35	2,40	2,45	2,50
$\alpha \times 10^3$	4	2	1	1	0,9	0,5	1,1	0,2	0,3	0,1
β	0,60	0,56	0,90	0,55	0,58	0,62	0,72	0,45	0,80	1,00
C	0,25	0,18	0,35	0,20	0,20	0,22	0,24	0,13	0,34	0,40

Контрольные вопросы

1. В чем состоит суть основных моделей отказов?
2. Чем различаются внезапный и деградационный отказы?
3. Какие модели используют для описания времени наработки до внезапных и деградационных отказов? Какой физический смысл имеют параметры этих моделей?
4. Что такое стационарность, ординарность и отсутствие последствия потока отказов?
5. Как определяют значение интенсивности при внезапном отказе?
6. Какой характер имеют зависимости интенсивностей внезапных и деградационных отказов от времени?
7. Чем различаются два вида деградационных отказов?
8. Приведите соотношения для расчета основных показателей безотказности.
9. Опишите последовательность проверки гипотезы о виде закона распределения.
10. Как выбрать количество интервалов гистограммы и в каких случаях это количество необходимо корректировать?
11. Запишите формулы для нахождения статистических оценок параметров исследуемых законов распределений.
12. С помощью графика $\hat{P}(t_{ик})$ докажите правильность оценки \hat{T} .

Лабораторная работа № 2

ОПРЕДЕЛЕНИЕ ПОЛЕЙ ДОПУСКОВ НА ВЫХОДНЫЕ ПАРАМЕТРЫ И ЭЛЕМЕНТЫ ЭЛЕКТРОННЫХ СРЕДСТВ МЕТОДОМ СТАТИСТИЧЕСКОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ

Цель работы:

- изучить методику определения допуска на выходной параметр электронного объекта по допускам на первичные параметры;
- изучить методику применения цифрового статистического моделирования для определения допусков на выходной параметр и элементы электронных средств.

Необходимые теоретические сведения

На технологию производства элементов электронных средств (ЭС) (резисторов, конденсаторов, транзисторов и т.п.) влияют различные дестабилизирующие факторы, поэтому параметры комплектующих элементов имеют определенный разброс относительно номинального значения. Каждый конкретный образец устройства имеет определенный набор элементов со случайными отклонениями от номинальных значений. От образца к образцу значения параметров комплектующих элементов изменяются также случайным образом, что приводит к случайному изменению выходного параметра устройства. Для установления вероятности нахождения выходного параметра изделия в пределах поля допуска необходимо иметь N образцов устройства, каждый из которых будет иметь свое значение выходного параметра.

При определении допусков различают задачи двух видов:

- а) вычисление допуска на выходной параметр по допускам на первичные параметры (прямая задача);
- б) нахождение допусков на первичные параметры по допуску на выходной (обратная задача).

При расчете используют зависимость выходного (определяющего) параметра y ЭС от его первичных параметров x_i , $i = 1 \dots n$:

$$y = \varphi(x_1, x_2, \dots, x_n). \quad (2.1)$$

Определяющим параметром y может быть коэффициент усиления, коэффициент нелинейных искажений, длительность или фронт формирующего импульса, резонансная частота, полоса пропускания и т.п.

Первичные параметры x_1, x_2, \dots, x_n представляют собой значения параметров резисторов, конденсаторов, транзисторов, микросхем и т.д., из которых комплектуется ЭС (как правило, функциональный узел (ФУ)).

Зависимость (2.1) часто аналитически трудно определить, поэтому в этих случаях ее можно заменить соответствующей регрессионной зависимостью, получаемой на основе специально спланированного активного эксперимента (см. лаб. работу № 4).

Допуски рассчитывают в предположении малости отклонений первичных параметров x_i от своих номинальных значений x_{i0} :

$$\Delta x_i = |x_i - x_{i0}|.$$

Если предположить, что зависимость (2.1) непрерывна, отклонение выходного параметра можно представить как

$$\Delta y = \sum_{i=1}^n \left. \frac{\partial y(\bar{x})}{\partial x_i} \right|_{\bar{x}_0} \cdot \Delta x_i. \quad (2.2)$$

Выражение (2.2) после деления левой и правой частей на $y = y(\bar{x}_0)$ при номинальных значениях параметров x_{i0} принимает вид

$$\frac{\Delta y}{y} = \sum_{i=1}^n \left[\frac{\partial y(\bar{x}_0)}{\partial x_i} \cdot \frac{x_{i0}}{y(\bar{x}_0)} \right] \cdot \frac{\Delta x_i}{x_{i0}}, \quad (2.3)$$

или

$$\delta y = \sum_{i=1}^n K_{vi} \cdot \delta x_i, \quad (2.4)$$

где δy , δx_i – относительные отклонения выходного и первичного параметров соответственно; K_{vi} – коэффициент влияния относительного отклонения первичного параметра x_i на относительное отклонение выходного параметра:

$$K_{vi} = \frac{\partial y(\bar{x}_0)}{\partial x_i} \cdot \frac{x_{i0}}{y(\bar{x}_0)}. \quad (2.5)$$

Первый множитель выражения (2.5) – это коэффициент чувствительности A_i , определяемый как значение частной производной функции $y(\bar{x})$ по переменной x_i при номинальных значениях переменных \bar{x}_0 :

$$A_i = \partial y(\bar{x}_0) / \partial x_i.$$

Если функция $y(\bar{x})$ не дифференцируема или ее частные производные сложно получить в аналитическом виде, можно использовать конечно-разностное уравнение вида

$$\frac{\partial y(\bar{x}_0)}{\partial x_i} \approx \frac{1}{\Delta_i} \cdot [y(\bar{x}_0) - y(x_{10}, \dots, x_{i0} + h_{x_i}, \dots, x_{n0})],$$

где h_{x_i} – малое приращение параметра x_i , $h_{x_i} \ll \Delta x_i$. При этом погрешность аппроксимации частной производной будет порядка Δ_i^2 .

Прямая задача расчета допусков

Прямую задачу определения допуска на выходной параметр можно решить с использованием указанных ниже методов.

1. Расчетный метод на «наихудший случай»

По заданным допускам на первичные параметры $[x_{i\min}, x_{i\max}]$ с учетом того, что $\Delta x_i = (x_{i\max} - x_{i\min})/2$, вычисляют допуск на выходной параметр $[y_{\min}, y_{\max}]$.

В этом случае не учитывают вероятностного распределения параметров y и $\{x_i\}$, $i = 1 \dots n$ внутри допуска, что приводит к очень широкому допуску на выходной параметр и может быть неприемлемо по техническим соображениям.

2. Расчетный вероятностный метод

В этом методе учтен статистический характер отклонений (абсолютных и относительных погрешностей) первичных параметров Δx_i , δx_i .

В большинстве случаев распределения величин x_i , Δx_i , δx_i можно считать нормальными (рис. 2.1).

Параметры распределения – математическое ожидание m_i и среднеквадратическое отклонение σ_i – можно определить по абсолютному (Δ_i) или относительному (δ_i) допуску на первичные параметры.

Если x_0 – номинальное значение параметра, то $\Delta = x_0 \cdot \delta$ или, если относительный допуск задан в процентах, то $\Delta = x_0 \cdot \delta, \%/100$.

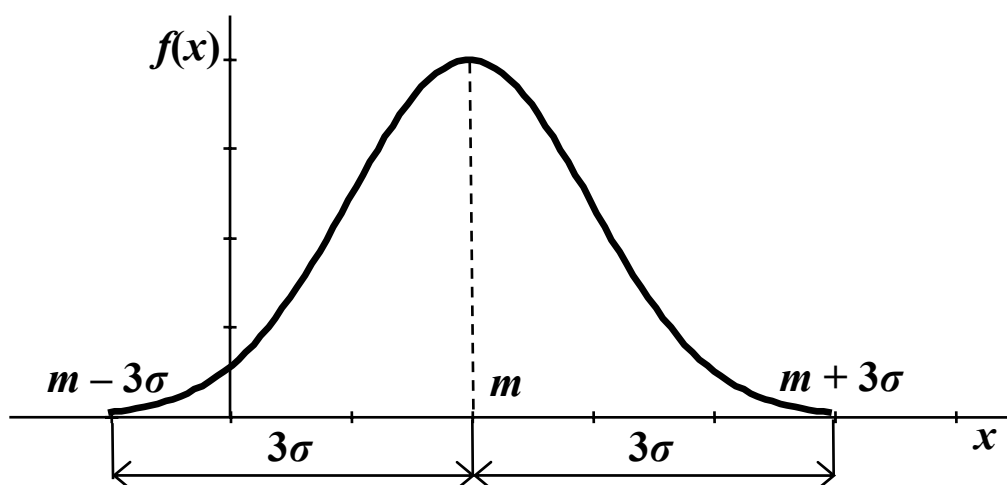


Рис. 2.1. Вероятностная модель первичного параметра

Например, для резистора с номинальным значением 1 кОм и симметричным допуском $\pm 20\%$ получим такие величины:

- половину относительного допуска $\delta = 0.2$;
- половину абсолютного допуска $\Delta = 200$ Ом;
- поле допуска на параметр $D = [800, 1200]$ Ом.

При отсутствии систематической погрешности (в случае симметричного допуска) математическое ожидание случайной величины x_i совпадает с номинальным значением параметра:

$$M\{x_i\} = m_i = x_{i0}; \quad M\{\Delta x_i\} = 0.$$

Так как вероятность того, что значения нормально распределенной случайной величины x будут находиться в пределах $m \pm 3\sigma$, близка к единице:

$$P\{m - 3\sigma \leq x \leq m + 3\sigma\} = 0.9973,$$

то среднеквадратические отклонения параметров определяют по правилу трех сигм:

$$\sigma_i = \Delta_i / 3 = (m_i \cdot \delta_i) / 3.$$

С учетом соотношения (2.2) получим

$$m_y = y(m_1, m_2, \dots, m_n) = y(\bar{x}_0); \quad (2.6)$$

$$\sigma_y = \sqrt{\sum_{i=1}^n A_i^2 \sigma_i^2}. \quad (2.7)$$

В силу свойства композиции нормальных законов распределение выходного параметра y также будет нормальным со значениями m_y , σ_y .

Зная поле допуска на выходной параметр $[y_{\min}, y_{\max}]$, вероятность нахождения этого параметра в пределах допуска (основную статистическую характеристику допуска) определяют как

$$P\{y \in [y_{\min}, y_{\max}]\} = F(y_{\max}) - F(y_{\min}),$$

где $F(\bullet)$ – интегральная функция нормального распределения. Как известно, ее нельзя выразить через элементарные функции и для ее расчета применяют численные методы интегрирования. Например, в пакете Mathcad используют встроенные функции **cnorm**(z) и **pnorm**(z, m, σ).

Функция **cnorm**(z) возвращает значение интеграла Лапласа

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^z e^{-x^2/2} dx,$$

где x – стандартная нормальная величина: $m_x = 0$, $\sigma_x = 1$.

Если случайная величина имеет другие параметры распределения, то ее можно привести к стандартному виду с помощью операций центрирования и нормирования.

Тогда вероятность $P\{y \in [y_{\min}, y_{\max}]\}$ находят как

$$\text{cnorm}\left(\frac{y_{\max} - m_y}{\sigma_y}\right) - \text{cnorm}\left(\frac{y_{\min} - m_y}{\sigma_y}\right).$$

Функция $\text{pnorm}(z, m, \sigma)$ возвращает значение в точке z кумулятивной функции нормального распределения с параметрами m и σ .

Аналогично решают прямую задачу в более сложных случаях (несимметричных допусков, коррелированных параметров).

Основными недостатками указанного метода являются:

- возможная погрешность, связанная с линейной аппроксимацией функции определяющего параметра (2.1);
- законы распределения как первичных параметров, так и выходного параметра в действительности могут отличаться от нормального закона распределения, например, быть несимметричными.

3. Метод статистического моделирования (испытаний)

Этот метод заключается в следующем:

- статистическом моделировании реализаций первичных параметров с требуемыми законами распределения $f(x_i)$ и соответствующими числовыми характеристиками m_i и σ_i ;
- совместном функциональном преобразовании реализаций в соответствии с выражением (2.1);
- статистической обработке последовательности получаемых значений выходного параметра y .

При статистическом моделировании значений первичных параметров маловлияющие параметры (те, у которых коэффициенты влияния меньше на два и более порядков) можно считать постоянными и равными их номинальным значениям.

Для генерирования случайных величин x с любым интегрируемым законом распределения используют метод обратной функции:

$$x_i = F^{-1}(r_i),$$

где $F^{-1}(\bullet)$ – функция, обратная интегральной функции распределения; r_i – реализации стандартной равновероятной величины, $r \in [0, 1]$.

Если обратная интегральная функция не может быть получена в явном виде, то применяют другие методы формирования реализаций, основанные на частных свойствах распределения.

Статистическая обработка результатов моделирования обычно включает в себя построение гистограммы распределения выходного параметра с проверкой гипотезы о виде распределения, оценку параметров распределения, а также оценку вероятности нахождения выходного параметра в поле допуска $[y_{\min}, y_{\max}]$.

Наиболее предпочтительной формой представления результатов статистической обработки является построение на одном графике гистограммы распределения выходного параметра и границ поля допуска и расчет эмпирической вероятности попадания выборочных значений $\{y_i\}$ в допусковую область (этой вероятности соответствует площадь гистограммы, ограниченная нижним y_{\min} и верхним y_{\max} допустимыми значениями выходного параметра).

Преимуществом этого метода является учет действительных законов распределения первичных и выходного параметров и нелинейных особенностей функции $y = \varphi(\bar{x})$.

Обратная задача расчета допусков

Основными методами решения обратной задачи являются расчетный метод и метод статистического моделирования.

1. Расчетный метод

По заданному допуску на выходной параметр определяют среднеквадратическое отклонение.

$$\sigma_y = \Delta/3 = (m_y \cdot \delta)/3.$$

На основе соотношения (2.7) составляют уравнение

$$\sigma_y^2 = \sum_{i=1}^n A_i^2 \sigma_i^2 = \sum_{i=1}^n E_i, \quad (2.9)$$

где $A_i = \partial y(\bar{x}_0)/\partial x_i$.

Уравнение (2.9) не определено относительно неизвестных среднеквадратических отклонений первичных параметров σ_i . Чтобы его доопределить, используют различные методы. В частности, с каждой из составляющих общей погрешности E_i можно связать весовой коэффициент q_i (который находят экспертным путем). Выразив величины E_i , например, через E_1 , получают полностью определенную систему уравнений

$$\sigma_y^2 = \sum_{i=1}^n E_i; \quad E_j = E_1 \cdot \frac{q_j}{q_1}, \quad j = 2 \dots n.$$

Ее решение позволяет найти среднеквадратические отклонения σ_i всех первичных параметров, а значит, и допуски на них Δ_i (или δ_i).

Если вклады всех первичных параметров x_i в общую погрешность равноценны, то $q_i = 1/n$, при этом $E_j = E_1$ и среднеквадратические погрешности определяют как

$$\sigma_j = \frac{A_1}{A_j} \cdot \sigma_1,$$

т.е. обратно пропорционально коэффициентам чувствительности A_j .

Рассмотренный метод является простейшим расчетным подходом к определению допусков на первичные параметры. В более сложных случаях учитывают корреляцию между отдельными параметрами и стоимостные затраты на обеспечение требуемого поля допуска. Задача приобретает оптимизационный характер, а расчетные соотношения существенно усложняются.

Недостаток метода, как и при решении прямой задачи, – неучет нелинейных свойств зависимости (2.1), а также использование только нормального распределения выходного параметра и соответствующих погрешностей.

2. Метод статистического моделирования

Этот метод является итерационным вариантом аналогичного метода при решении прямой задачи определения допусков. Начальные значения полей допусков Δ_i (или δ_i) на первичные параметры x_i устанавливают обратно пропорционально их коэффициентам влияния K_{vi} и согласно стандартизованному ряду допусков. При этом учитывают заданный допуск δ на выходной параметр, а также стоимость обеспечения предполагаемого поля допуска на каждый первичный параметр. Так, например, с экономической точки зрения целесообразнее предъявлять повышенные требования к прецизионности резисторов, чем конденсаторов.

На каждом этапе итерационного процесса выполняют следующее:

- корректируют значения среднеквадратических отклонений и допусков на первичные параметры;
- генерируют случайные реализации первичных параметров x_i в соответствии со скорректированными СКО и действительными законами распределения $f(x_i)$;
- моделируют значения выходного параметра по функциональной зависимости $y = \varphi(\vec{x})$, выполняют их статистическую обработку и оценивают эффективность коррекции.

Итерационный процесс коррекции допусков δ_i заканчивают, когда результаты статистического анализа подтверждают заданную вероятность нахождения выходного параметра в поле допуска.

Корректировать необходимо, прежде всего, влияющие первичные параметры. Маловлияющие параметры при статистическом моделировании можно считать условно постоянными.

Постановка задачи лабораторной работы

В данной работе изучают метод статистического моделирования при решении прямой и обратной задач определения допусков.

Конкретным объектом исследования принята эквивалентная электрическая схема изделия (приложение).

Выходным параметром объекта является значение коэффициента усиления. Так как объект динамический, то значение выходного параметра зависит от частоты входного сигнала и представляет собой амплитудно-частотную характеристику (АЧХ). Поэтому анализ и расчеты допусков необходимо выполнить для той частоты, на которой влияние разброса значений первичных параметров максимально.

При выполнении работы закон распределения первичных параметров и их погрешностей будем считать нормальным, значения этих параметров и их изменения – не зависимыми друг от друга.

Допуск на первичные параметры установим по правилу трех сигм.

Порядок выполнения работы

1. Зададим в Mathcad: **M** – объем выборки; **N** – количество точек для построения графиков; **L** – количество интервалов гистограммы.

Определим соответствующие переменные циклов:

$$\begin{aligned} \mathbf{M} &:= 200 & \mathbf{N} &:= 101 & \mathbf{L} &:= 12 \\ \mathbf{i} &:= 0.. \mathbf{M} - 1 & \mathbf{j} &:= 0.. \mathbf{N} - 1 & \mathbf{l} &:= 0.. \mathbf{L} - 1 \\ & & & & \mathbf{II} &:= 0.. \mathbf{L} \end{aligned}$$

Диапазон изменения частот – от 0 до 1 кГц (в случае появления сообщения об ошибке при попытке расчета массива значений АЧХ следует установить минимальную частоту, равную 1 Гц).

Создадим массив дискретных частот с шагом **dF**:

$$\mathbf{dF} := 10.0 \quad \mathbf{f}_j := \mathbf{j} \cdot \mathbf{dF}$$

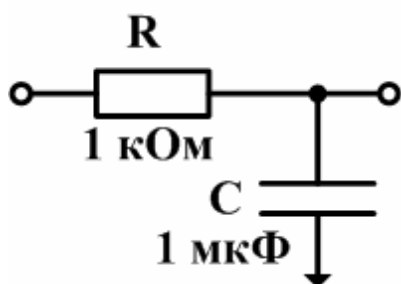


Рис. 2.2. Модель объекта

2. Введем в ЭВМ номинальные значения первичных параметров и аналитическое выражение выходного параметра устройства (АЧХ) как функции значений электрических параметров элементов (сопротивлений резисторов, емкости конденсаторов и т.д.).

Например, первичные параметры RC-цепи (рис. 2.2):

$$\mathbf{R} := 1000 \quad \mathbf{C} := 10^{-6}$$

АЧХ RC-цепи как функция частоты **f** и параметров **R** и **C**:

$$\mathbf{K}(\mathbf{f}, \mathbf{R}, \mathbf{C}) := \left| \frac{1}{1 + 2i \cdot \pi \cdot \mathbf{f} \cdot \mathbf{R} \cdot \mathbf{C}} \right|$$

3. Выполним расчет АЧХ $K(f, \bar{x}_{\text{НОМ}})$ в заданном диапазоне частот при номинальных значениях параметров элементов $\bar{x}_{\text{НОМ}}$:

$$K0_j := K(f_j, R, C)$$

Построим график АЧХ исследуемого объекта (рис. 2.3).

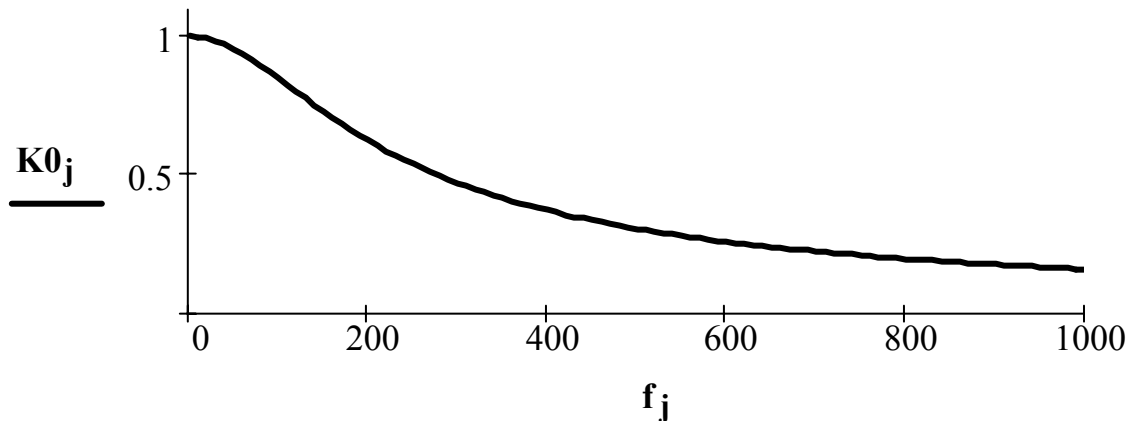


Рис. 2.3. График АЧХ RC-цепи

4. Рассчитаем частотные зависимости коэффициентов влияния элементов ЭС на определяющий параметр (АЧХ) по формуле

$$K_{bi}(f) = \frac{\{K(x_{i\text{НОМ}} + \Delta x_i) - K(x_{i\text{НОМ}})\} \cdot x_{i\text{НОМ}}}{\Delta x_i \cdot K(x_{i\text{НОМ}})},$$

где Δx_i – малое приращение номинального значения параметра $x_{i\text{НОМ}}$; f – частота сигнала; $K(x_{i\text{НОМ}})$ – значение АЧХ при номинальных значениях параметров элементов.

Величину приращения Δx_i установим равной 1 % от $x_{i\text{НОМ}}$.

Например, определим коэффициенты влияния резистора и конденсатора для RC-цепи. Результаты изобразим графически (рис. 2.4, 2.5).

Найдем коэффициент влияния резистора:

$$dr := 0.01 \cdot R \quad kr_j := \frac{K(f_j, R + dr, C) - K0_j}{dr} \cdot \frac{R}{K0_j}$$

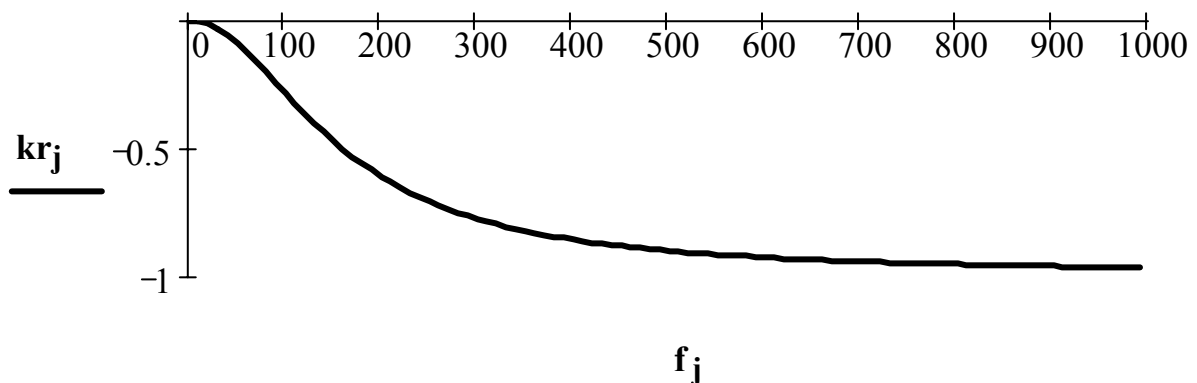


Рис. 2.4. График частотной зависимости коэффициента влияния резистора

Вычислим коэффициент влияния конденсатора:

$$dc := 0.01 \cdot C \quad kc_j := \frac{K(f_j, R, C + dc) - K0_j}{dc} \cdot \frac{C}{K0_j}$$

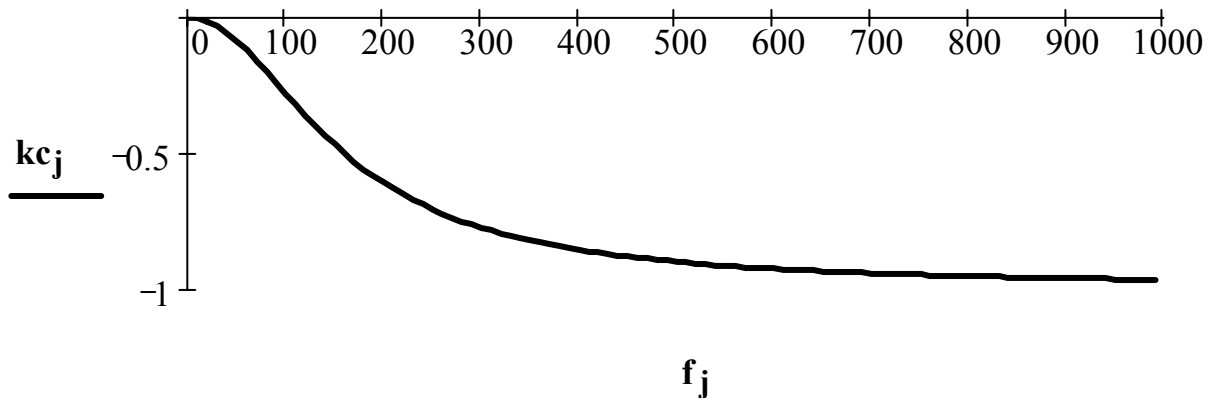


Рис. 2.5. График частотной зависимости коэффициента влияния конденсатора

5. Найдем частотную зависимость относительной погрешности выходного параметра из выражения

$$\delta_y(f) = \frac{\Delta y(f)}{y(f)} = \sum_{i=1}^n K_{Bi} \cdot \frac{\Delta x_i}{x_{i_{НОМ}}},$$

где n – количество элементов в устройстве.

Для RC-цепи получим

$$dy_j := \left(kr_j \cdot \frac{dr}{R} \right) + kc_j \cdot \frac{dc}{C}$$

График зависимости $dy_j(f_j)$ показан на рис. 2.6.

Расположение этого графика в отрицательной полуплоскости значений относительной погрешности dy_j свидетельствует об отрицательной связи выходного и первичных параметров исследуемого объекта: с увеличением значений R и C значение y (АЧХ RC-цепи) уменьшается.

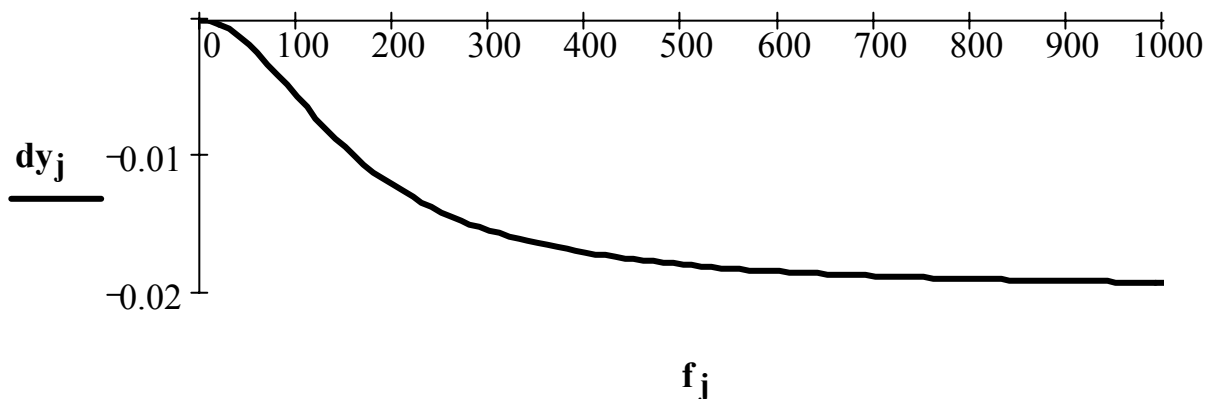


Рис. 2.6. График частотной зависимости относительной погрешности выходного параметра – АЧХ RC-цепи

6. Найдем частоту f_n , на которой абсолютное значение относительной погрешности $|\delta_y(f_n)|$ достигает максимума, т.е. частоту, на которой влияние разброса значений элементов максимально:

$$\begin{aligned} dy_j &:= |dy_j| \\ \max_dy &:= \max(dy) \\ n &:= \sum_j \text{if}(dy_j = \max_dy, j, 0) \end{aligned}$$

В рассматриваемом примере (RC-цепь) номер n частоты в массиве частот f , при которой влияние отклонений первичных параметров на относительную погрешность выходного параметра максимально,

$$n = 100$$

Соответствующая частота, Гц:

$$f_n = 1 \times 10^3$$

7. Для найденной частоты необходимо проанализировать значения коэффициентов влияния $K_{vi}(f_n)$ всех первичных элементов и отобрать для статистического моделирования два - три элемента, максимально влияющих на АЧХ.

Например, на частоте максимального отклонения АЧХ RC-цепи значения коэффициентов влияния резистора и конденсатора соответственно

$$kr_n = -0.966 \quad kc_n = -0.966$$

Таким образом, и резистор, и конденсатор влияют на величину выходного параметра RC-цепи в одинаковой степени. Поэтому статистическое моделирование выполняем для обоих первичных параметров.

8. Выберем начальные значения допусков δ на элементы ЭС из ряда: $\pm 1, \pm 2, \pm 5, \pm 10, \pm 20, \pm 30$ %.

Например, пусть $R = 1 \text{ кОм} \pm 10$ %, $C = 1 \text{ мкФ} \pm 20$ %.

Тогда допуски на первичные параметры соответственно

$$dr := 0.1 \cdot R \quad dc := 0.2 \cdot C$$

9. Определим функцию-генератор стандартных нормальных чисел (используем алгоритм композиции, основанный на центральной предельной теореме):

$$\text{norm}(z) := 0.5 \cdot \left(\sum_{j=1}^{48} \text{rnd}(1) - 24 \right)$$

Получим M нормально распределенных значений элементов

$$c_i := \text{norm}(i) \cdot \left(\frac{dc}{3} \right) + C \quad r_i := \text{norm}(i) \cdot \left(\frac{dr}{3} \right) + R$$

Графики результатов моделирования случайных значений первичных параметров **R** и **C** показаны на рис. 2.7, 2.8.

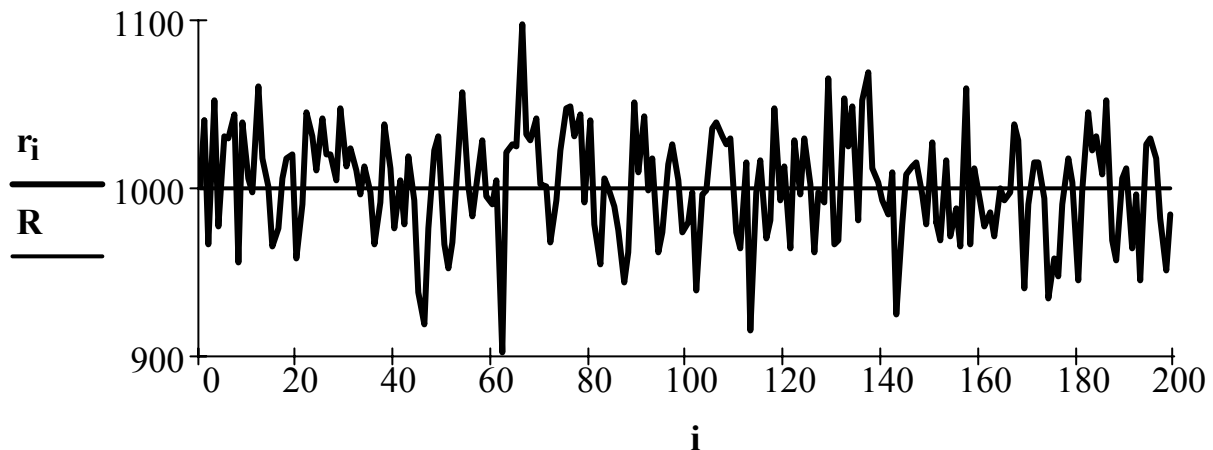


Рис. 2.7. График реализаций случайных значений резистора R

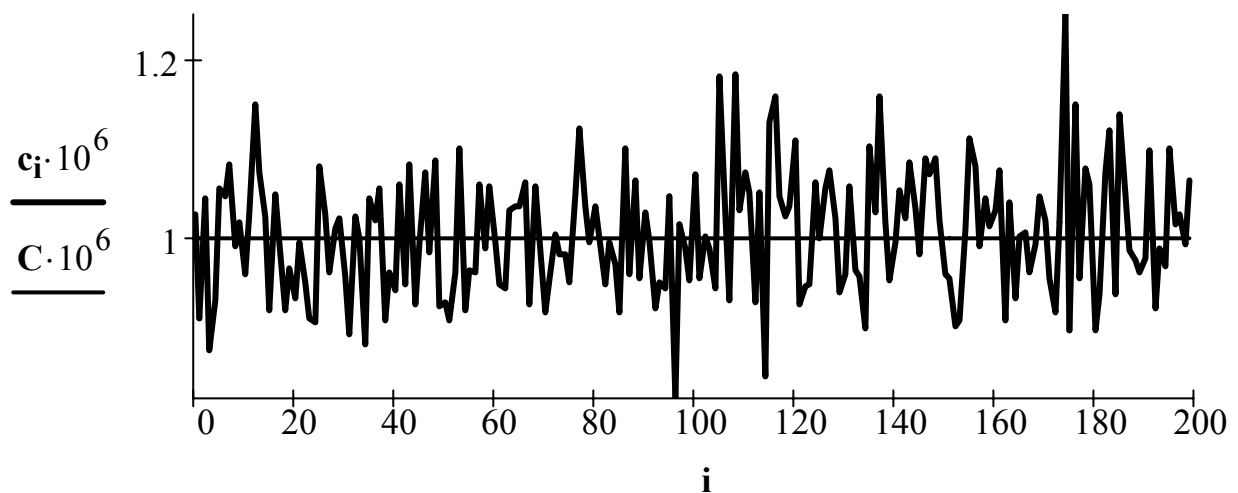


Рис. 2.8. График реализаций случайных значений конденсатора C

10. Получим **M** значений коэффициента передачи на частоте f_n :

$$k_i := K(f_n, r_i, c_i)$$

11. Выполним статистический анализ результатов моделирования выходного параметра, для чего необходимо:

- рассчитать среднее выборочное значение m_K выходного параметра (коэффициента передачи k) и сравнить m_K со значением АЧХ $K_{ном}$ на частоте f_n при номинальных значениях элементов;
- оценить СКО σ_K коэффициента передачи k ;
- построить в одних координатных осях гистограмму распределения значений коэффициента передачи k и график теоретической плотности нормального распределения с параметрами m_K и σ_K ;
- определить допуск на выходной параметр k по правилу трех сигм.

Оценка математического ожидания выходного параметра

$$\mathbf{mk} := \mathbf{mean}(\mathbf{k}) \quad \mathbf{mk} = 0.159$$

Номинальное значение выходного параметра

$$\mathbf{K0}_n = 0.159$$

Таким образом, номинальное значение выходного параметра совпадает с математическим ожиданием его случайных реализаций.

Оценка среднеквадратического отклонения выходного параметра

$$\sigma \mathbf{k} := \mathbf{Stdev}(\mathbf{k}) \quad \sigma \mathbf{k} = 0.012$$

Определим минимальное и максимальные выборочные значения:

$$\mathbf{mink} := \mathbf{min}(\mathbf{k}) \quad \mathbf{maxk} := \mathbf{max}(\mathbf{k})$$

Найдем ширину интервала гистограммы

$$\mathbf{h} := \frac{\mathbf{maxk} - \mathbf{mink}}{\mathbf{L}}$$

и координаты границ интервалов $\{\mathbf{w}_l\}$, $l = 0 \dots L$, где L – количество интервалов гистограммы

$$\mathbf{w}_l := \mathbf{h} \cdot l + \mathbf{mink}$$

С помощью функции $\mathbf{hist}(\bullet, \bullet)$ найдем абсолютную частоту попадания выборочных значений в интервалы гистограммы и рассчитаем соответствующие значения эмпирической плотности распределения вероятностей:

$$\mathbf{g} := \mathbf{hist}(\mathbf{w}, \mathbf{k}) \quad \mathbf{f0}_l := \frac{\mathbf{g}_l}{\mathbf{h} \cdot \mathbf{M}}$$

Для того, чтобы построить график плотности нормального распределения, установим параметры распределения \mathbf{m} и σ равными их статистическим оценкам:

$$\mathbf{m} := \mathbf{mk} \quad \sigma := \sigma \mathbf{k}$$

Рассчитаем координаты массива точек, расположенных с равным шагом на оси абсцисс $\{\mathbf{x}_j\}$, $j = 0 \dots N-1$, где N – количество точек для построения графика:

$$\mathbf{a} := \mathbf{mk} - 3 \cdot \sigma \mathbf{k} \quad \mathbf{b} := \mathbf{mk} + 3 \cdot \sigma \mathbf{k} \quad \mathbf{x}_j := \mathbf{a} + \frac{\mathbf{b} - \mathbf{a}}{\mathbf{N} - 1} \cdot j$$

Определим функцию, возвращающую значение плотности нормального распределения с параметрами \mathbf{m} и σ в заданных точках

$$\mathbf{f}(\mathbf{z}) := \frac{1}{\sqrt{2 \cdot \pi} \cdot \sigma} \cdot e^{-\frac{(\mathbf{z} - \mathbf{m})^2}{2 \cdot \sigma^2}}$$

Совместный график теоретической и эмпирической плотности распределения (гистограммы) выходного параметра показан на рис. 2.9.

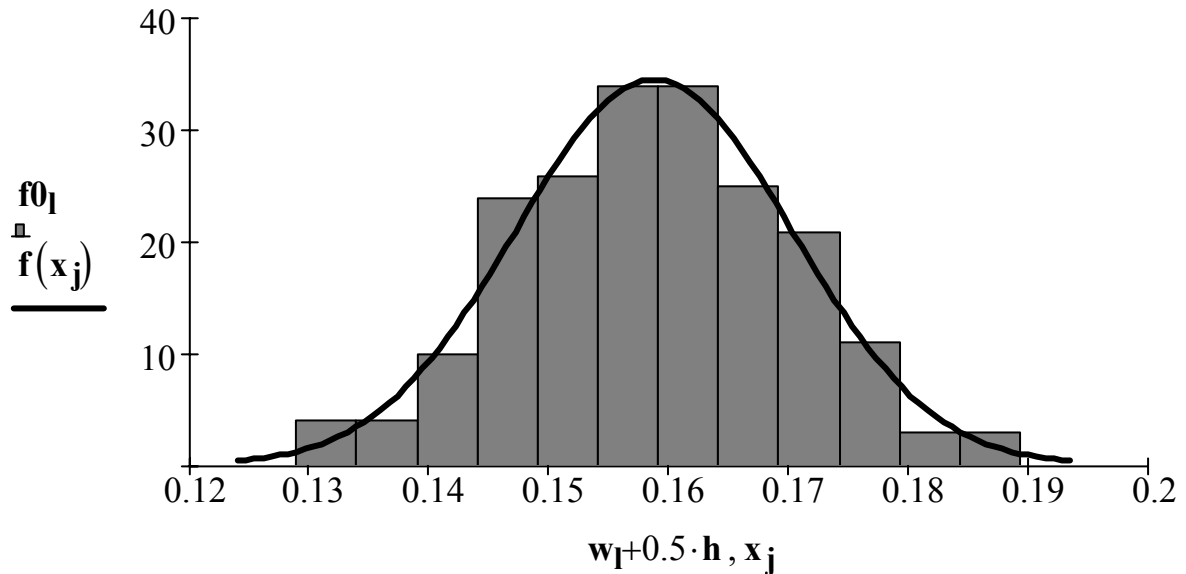


Рис. 2.9. Гистограмма и теоретическая плотность распределения вероятности значений выходного параметра

Абсолютный допуск на выходной параметр при этом составит

$$\Delta := 3 \cdot \sigma_k \quad \Delta = 0.035$$

Относительный допуск, %, определим как

$$\delta := \frac{\Delta \cdot 100}{mk} \quad \delta = 21.91$$

Для решения обратной задачи – нахождения допусков на первичные параметры при заданном допуске δ на выходной параметр – в программу моделирования, рассмотренную выше, нужно внести некоторые изменения.

Допустим, заданное значение относительного допуска на выходной параметр $\delta = 10\%$.

12. Установим начальные значения допусков на первичные параметры обратно пропорционально их коэффициентам влияния K_{vi} : чем больше значение K_{vi} , тем меньше должно быть поле допуска i -го параметра. И наоборот, для маловлиятельных элементов поле допуска может быть намного больше δ .

В рассматриваемом объекте (RC-цепи) коэффициенты влияния резистора и конденсатора на выходной параметр одинаковы и на частоте максимального отклонения АЧХ $kr_n = kc_n = -0.966$. Поэтому для элементов **R** и **C** выберем одинаковые допуски – $\pm 10\%$:

$$dr := 0.1 \cdot R \quad dc := 0.1 \cdot C$$

13. Получим **M** нормально распределенных значений элементов

$$c_i := \text{norm}(i) \cdot \left(\frac{dc}{3} \right) + C \quad r_i := \text{norm}(i) \cdot \left(\frac{dr}{3} \right) + R$$

14. Сформируем массив значений выходного параметра

$$k_i := K(f_n, r_i, c_i)$$

15. При заданном допуске δ на выходной параметр определим нижнее и верхнее допустимые значения АЧХ на частоте f_n по формулам:

$$K_{\min} = K_{\text{НОМ}} - \delta \cdot K_{\text{НОМ}}; K_{\max} = K_{\text{НОМ}} + \delta \cdot K_{\text{НОМ}}.$$

В Mathcad эти формулы запишем так:

$$k0min := K0_n - 0.1 \cdot K0_n \quad k0max := K0_n + 0.1 \cdot K0_n$$

Результаты моделирования выходного параметра, его номинальное $K0_n$, верхнее $k0max$ и нижнее $k0min$ допустимые значения представим графически, как это показано на рис. 2.10.

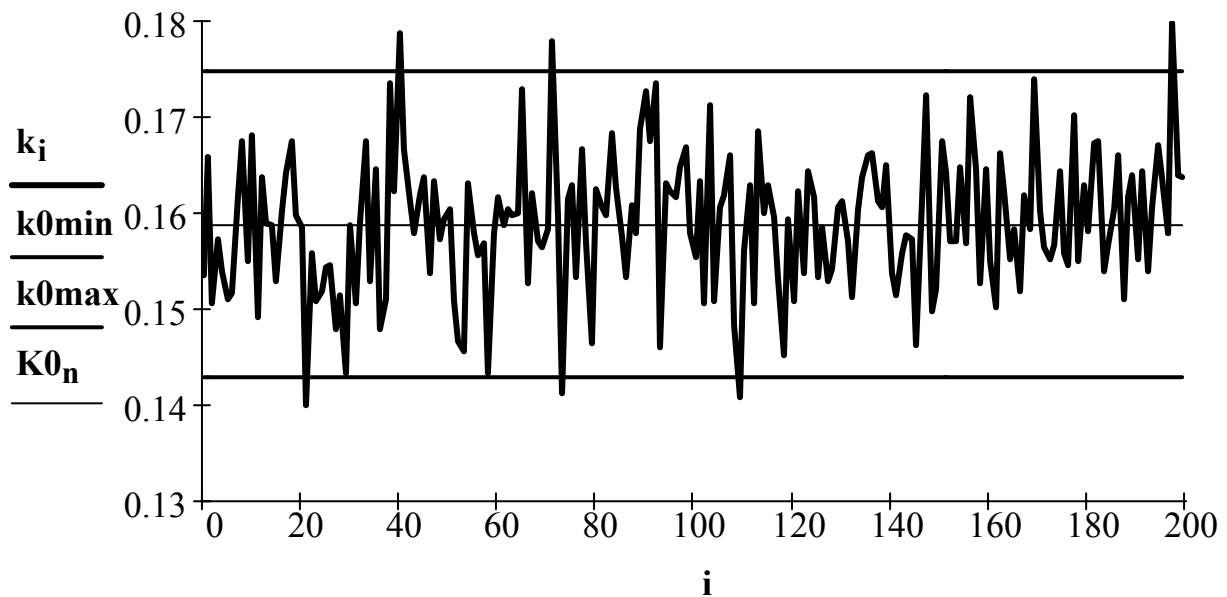


Рис. 2.10. Разброс реализаций выходного параметра относительно номинального значения и границы поля допуска

16. Выполним статистический анализ полученных данных.

Построим гистограмму распределения выходного параметра (см. п. 11) и для наглядного представления вероятности нахождения выходного параметра в поле допуска нанесем на гистограмму границы $k0min$ и $k0max$ (рис. 2.11). Для этого определим пользовательскую функцию ступенчатого (П-образного) вида:

$$step(z) := \text{if}(k0min < z < k0max, 50, 0)$$

$$ww_1 := step(w_1)$$

Высоту «ступеньки» (в данном примере она равна 50) установим в зависимости от максимальной высоты столбцов гистограммы.

Аргумент функции $step(\bullet)$ – массив координат границ интервалов гистограммы. Таким образом, если значение w_1 находится в пределах заданного допуска, то $ww_1 = 50$, иначе $ww_1 = 0$.

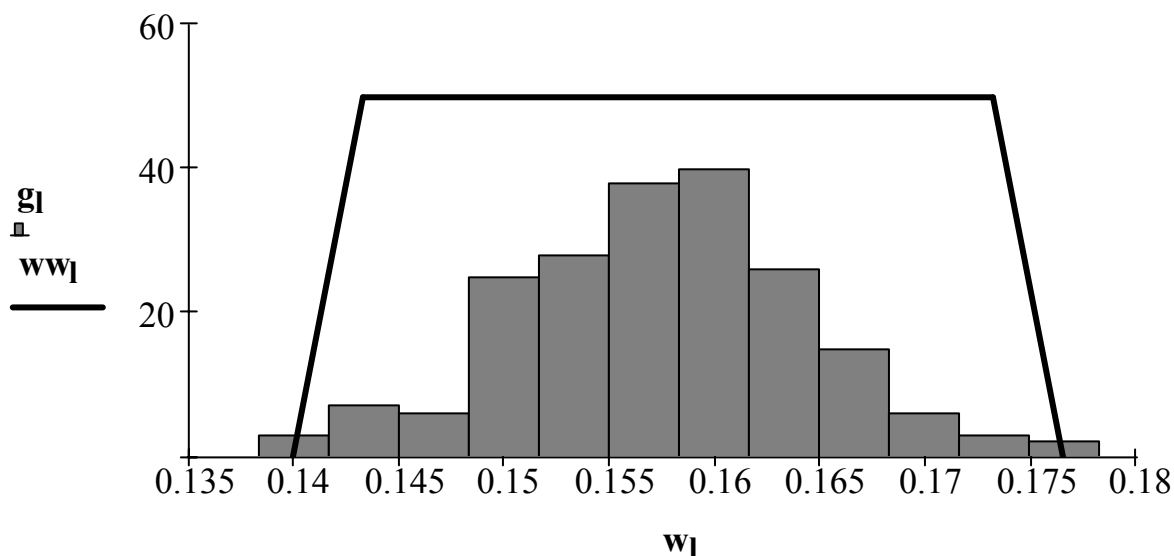


Рис. 2.11. Расположение гистограммы выходного параметра относительно границ поля допуска

17. Рассчитаем количество реализаций выходного параметра k , выходящих за границу допуска $[k_{0min}, k_{0max}]$:

$$N1 := \sum_i \text{if}(k_i < k_{0min}, 1, 0) \quad N2 := \sum_i \text{if}(k_i > k_{0max}, 1, 0)$$

18. Определим вероятность нахождения выходного параметра в пределах допуска и сравним ее с заданным уровнем $P_z = 0.95$:

$$P := \frac{(M - N1 - N2)}{M} \quad P = 0.97$$

Если полученная вероятность нахождения АЧХ в пределах допуска оказалась меньше заданной, следует переопределить поля допусков на номиналы элементов обратно пропорционально их влиянию на значение выходного параметра и повторить расчеты по пп. 13 – 18.

Содержание отчета

Отчет о лабораторной работе должен содержать:

- эквивалентную электрическую схему объекта;
- аналитическое выражение АЧХ;
- график АЧХ $K(f, \vec{x}_{ном})$ в заданном диапазоне частот;
- графики частотной зависимости коэффициентов влияния $K_{vi}(f)$ каждого первичного параметра в заданном диапазоне частот;
- график частотной зависимости относительной погрешности выходного параметра $\delta_y(f)$;
- алгоритм моделирования значений первичных параметров и графики полученных реализаций;

- график результатов моделирования выходного параметра;
- результаты оценки среднего значения, среднеквадратического отклонения, поля допуска на выходной параметр по заданной относительной погрешности на этот параметр;
- результаты оценки вероятности нахождения выходного параметра в поле допуска;
- результаты коррекции допусков на первичные параметры.
- выводы по результатам лабораторной работы.

Контрольные вопросы

1. Чем различаются прямая и обратная задачи расчета допусков?
2. Докажите, что при малых значениях допусков на первичные параметры возможно линейное представление допуска на выходной параметр.
3. Что характеризует коэффициент влияния?
4. В чем суть расчета допусков на «наихудший случай»?
5. В чем заключается вероятностный метод расчета допусков?
6. В чем суть метода статистического моделирования при установлении допусков? Назовите его преимущества.
7. Почему для моделирования случайных значений первичных параметров выбран нормальный закон распределения? В каких случаях распределение значений параметров нельзя считать нормальным?
8. Пусть параметр x может принимать значения в интервале $[300, 900]$. Распределение значений x считаем нормальным. Определите для параметра x :
 - а) половину абсолютного допуска Δ_x ;
 - б) половину относительного допуска $\delta_x, \%$;
 - в) математическое ожидание m_x ;
 - г) среднеквадратическое отклонение σ_x .
9. Пусть в результате статистического анализа выборочных значений параметра x найдены оценки $\hat{m}_x = 90$ и $\hat{\sigma}_x = 3$. Определите для параметра x :
 - а) номинальное значение $x_{\text{НОМ}}$;
 - б) половину относительного допуска $\delta_x, \%$;
 - в) половину относительного допуска $\delta_x, \%$;
 - г) поле допуска на параметр $[x_{\text{min}}, x_{\text{max}}]$
10. Почему при статистическом моделировании маловлияющие параметры можно считать условно постоянными?
11. Как по гистограмме распределения параметра найти вероятность нахождения его в поле допуска?

Лабораторная работа № 3

МЕТОДЫ ЦИФРОВОГО СТАТИСТИЧЕСКОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ БЕЗОТКАЗНОСТИ СЛОЖНЫХ ОБЪЕКТОВ

Цель работы:

- изучить методику оценки показателей безотказности сложного технического объекта по результатам цифрового статистического моделирования;
- получить навыки моделирования отказов по виду распределения времени наработки до отказа и по параметрической модели.

Необходимые теоретические сведения

При анализе надежности технические объекты можно рассматривать как единое целое (элемент) или сложное (с позиций надежности) соединение элементов. Во втором случае возникает необходимость определить характеристики безотказности объекта по известным характеристикам безотказности составляющих частей (элементов).

С точки зрения надежности различают следующие основные типы соединений элементов (структур) (рис.3.1):

- последовательное – отказ объекта при отказе одного (любого) из элементов;
- параллельное – отказ объекта при отказе всех элементов;
- мостиковое – отказ объекта наступает при отказе элементов {1 и 2 и (5 ИЛИ 4)} ИЛИ {3 и 4 и (5 ИЛИ 2)}, отказы отдельных элементов полагают независимыми совместными случайными событиями;
- комбинированное – всевозможные комбинации указанных соединений элементов.

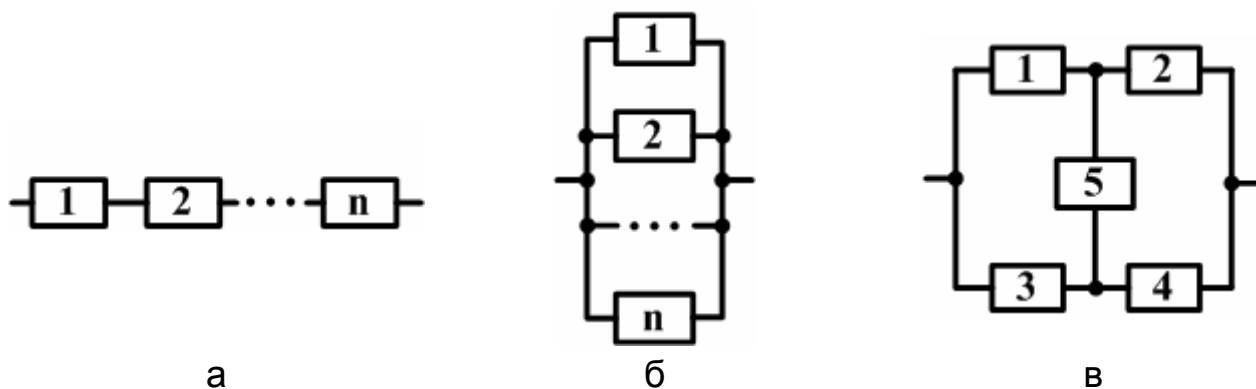


Рис. 3.1. Надежные соединения элементов:
а – последовательное; б – параллельное; в – мостиковое

Согласно теоремам теории вероятности, вероятность совместного появления двух независимых событий A и B равна произведению вероятностей этих событий:

$$P(A \cdot B) = P(A) \cdot P(B),$$

а вероятность появления хотя бы одного из двух событий, A или B , равна сумме вероятностей этих событий без вероятности их совместного появления:

$$P(A + B) = P(A) + P(B) - P(A) \cdot P(B).$$

Каждый элемент сложного объекта может находиться в одном из двух взаимоисключающих состояний: работоспособном или отказа, поэтому в каждый момент времени

$$P_o(t) + P_{б.р}(t) = 1,$$

где $P_o(t)$ – вероятность отказа; $P_{б.р}(t)$ – вероятность безотказной работы.

Зная вероятности $P_i(t)$ безотказной работы комплектующих элементов, в предположении независимости отдельных отказов можно рассчитать эту вероятность $P(t)$ для объекта в целом, например:

- для последовательного соединения

$$P(t) = \prod_{i=1}^n P_i(t);$$

- параллельного соединения

$$P(t) = 1 - \prod_{i=1}^n [1 - P_i(t)].$$

Сведя комбинированное соединение к конкретной комбинации указанных соединений, можно найти $P(t)$ и для него.

Определив $P(t)$, можно вычислить и другие показатели безотказности: интенсивность отказов $\lambda(t)$, среднюю наработку до отказа T (см. лаб. работу № 1).

Однако непосредственный расчет вероятности во многих случаях неприемлем по следующим причинам:

- а) функция $P(t)$ может оказаться очень сложной для интегрирования и нахождения производных;
- б) вероятности $P_i(t)$ не всегда заданы, их приходится определять посредством других известных характеристик;
- в) вероятности $P_i(t)$ часто нельзя выразить в элементарных функциях.

В этом случае эффективным средством решения задачи оценки показателей безотказности является метод цифрового статистического моделирования наработок до отказа отдельных элементов и определения по

ним наработок до отказа всего объекта с последующей статистической обработкой данных такого моделирования.

При последовательном и параллельном соединениях наработка до отказа определяется соответственно так:

$$t = \min(t_1, t_2, \dots, t_n); \quad (3.1)$$

$$t = \max(t_1, t_2, \dots, t_n). \quad (3.2)$$

При комбинированном соединении (рис. 3.2)

$$t = \min(t_1, \max(t_2, t_3), t_4). \quad (3.3)$$

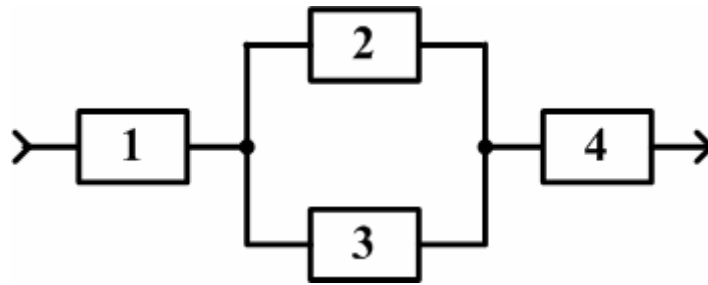


Рис. 3.2. Пример комбинированного соединения

Таким образом, задачу сводим к статистическому моделированию наработок до отказа t_i отдельных элементов сложного объекта, и ее можно решать двумя способами:

- а) статистическим моделированием реализаций наработок по заданному или определенному по эмпирическим данным закону распределения времени наработки до отказа;
- б) статистическим моделированием параметров физической модели возникновения отказа.

В первом случае используют известные подходы формирования случайных реализаций путем функционального преобразования реализаций стандартной величины $\{r_i\}$, равномерно распределенной в интервале $[0, 1]$ (рис. 3.3, 3.4):

$$y_i = F^{-1}(r_i).$$

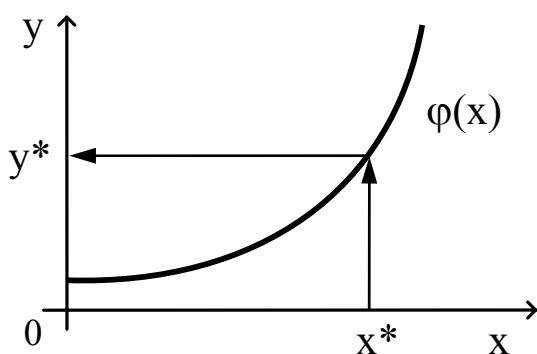


Рис. 3.3. Функциональное преобразование случайной величины

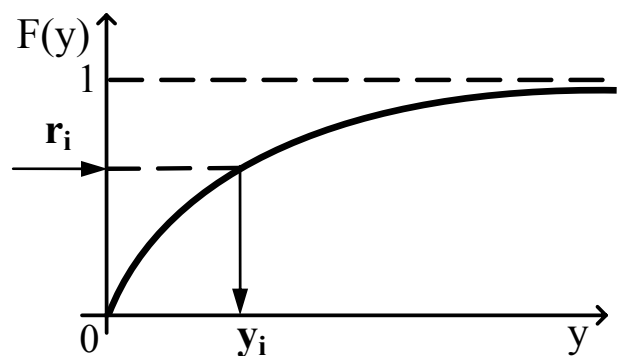


Рис. 3.4. Моделирование непрерывных случайных величин методом обратной функции

Если обратная функция распределения $F^{-1}(\bullet)$ в явном виде не существует, применяют другие методы формирования реализаций, основанные на частных свойствах распределения, например, метод композиции для моделирования нормальных последовательностей.

В табл. 3.1 приведены алгоритмы генерации случайных чисел $\{t_i\}$ для наиболее распространенных в теории надежности законов распределения $f(t)$.

Таблица 3.1

Алгоритмы моделирования наработок до отказа элементов

Закон распределения наработки t	Выражение плотности распределения $f(t)$	Алгоритм датчика наработок t
Экспоненциальный $E(\lambda)$	$\lambda \cdot e^{-\lambda t}$	$-\frac{1}{\lambda} \cdot \ln(r)$
Нормальный $N(m, \sigma)$	$\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \cdot \exp\left\{-\frac{(t-m)^2}{2\sigma^2}\right\}$	$m + \sigma\sqrt{\frac{12}{n}} \cdot \left[\sum_{i=1}^n r_i - \frac{n}{2}\right]$
Вейбулла $B(a, b)$	$\frac{a}{b} \cdot \left(\frac{t}{b}\right)^{a-1} \cdot \exp\left\{-\left(\frac{t}{b}\right)^a\right\}$	$b \cdot [-\ln(r)]^{1/a}$
Логарифмически нормальный $L(m, \sigma)$	$\frac{1}{t\sigma\sqrt{2\pi}} \cdot \exp\left\{-\frac{\ln(t/m)^2}{2 \cdot \sigma^2}\right\}$	$m \cdot \exp(\sigma \cdot N),$ $N = \sqrt{-2 \cdot \ln(r_1)} \times$ $\times \cos(2\pi \cdot r_2)$
Рэлея $Re(\lambda)$	$\frac{t}{\lambda^2} \cdot \exp\left(-\frac{t^2}{2\lambda^2}\right)$	$\lambda \cdot \sqrt{-2 \cdot \ln(r)}$

Необходимо учитывать, что наработка до отказа не может принимать отрицательных значений, поэтому при моделировании нормальных наработок применяют усеченное нормальное распределение:

$$f_{yc}(t) = \begin{cases} \frac{1}{c} N(t; m, \sigma), & t \in [a, b]; \\ 0, & t \notin [a, b], \end{cases}$$

где a и b – параметры усечения; $N(t; m, \sigma)$ – плотность нормального распределения с параметрами m и σ ; c – константа усечения, определяемая из условия нормировки:

$$c = \int_a^b N(t; m, \sigma) dt.$$

На рис. 3.5 для сравнения показаны плотности нормального распределения – неограниченная $f(x)$ и усеченная $f_{yc}(x)$, имеющие одинаковые параметры распределения m и σ . Очевидно, что $f_{yc}(x_i) \neq f(x_i)$.

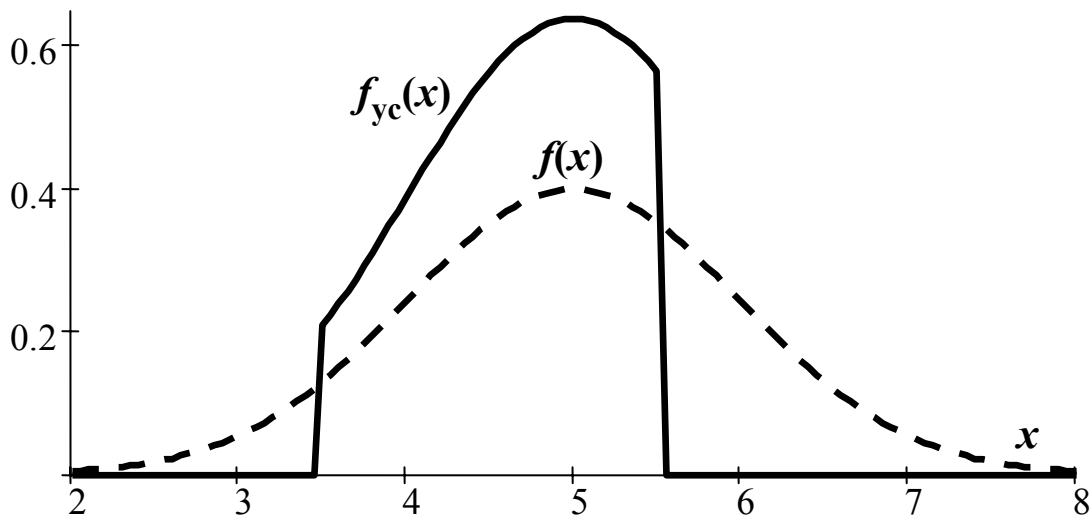


Рис. 3.5. Изменение вида плотности нормального распределения при усечении

Для генерирования нормальных выборок в Mathcad определим функцию **norm(z)**, возвращающую стандартные нормальные числа ($m = 0$, $\sigma = 1$)

$$\mathbf{norm}(z) := \left(\sum_{k=1}^{48} \mathbf{rnd}(1) - 24 \right) \cdot 0.5$$

и подпрограмму-функцию **Trunc(M, m, σ, a, b)**, генерирующую **M** реализаций усеченного в интервале **[a, b]** нормального распределения с параметрами **m** и **σ**:

```

Trunc(M, m, σ, a, b) :=
  k ← -1
  while k < M - 1
    n ← norm(k) · σ + m
    if a ≤ n ≤ b
      k ← k + 1
      xk ← n
    continue otherwise
  x

```


Гистограмма распределения значений, полученных с помощью функции $\text{Trunc}(M, m, \sigma, a, b)$, и соответствующая теоретическая плотность распределения показаны на рис. 3.6.

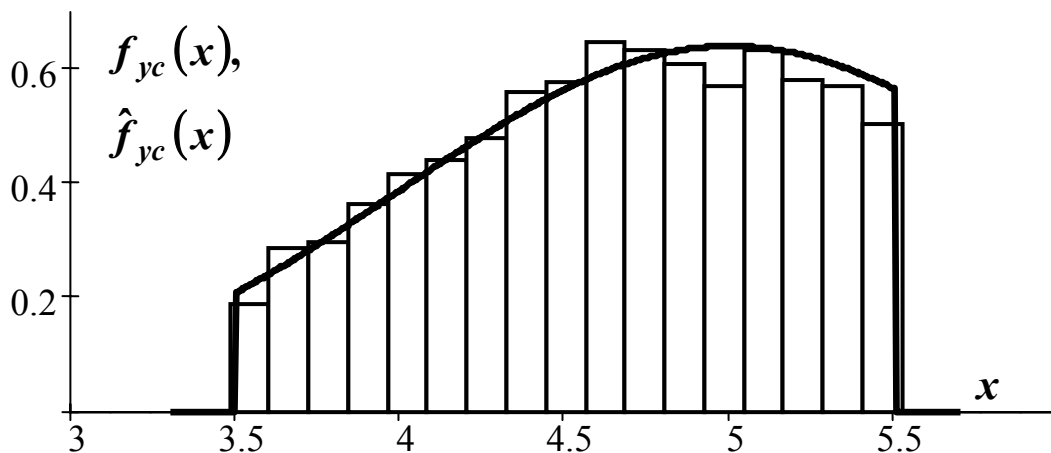


Рис. 3.6. Теоретическое и эмпирическое усеченные нормальные распределения

При моделировании случайных наработок до отказа рекомендуется устанавливать параметры усечения $a = 0$ и $b = \infty$.

Если выполняется условие $m > 3 \cdot \sigma$, то можно использовать и распределение $N(t; m, \sigma)$, так как вероятность появления отрицательных реализаций пренебрежимо мала.

Другим подходом к генерированию наработок до отказа является использование физической модели возникновения отказов по схеме «нагрузка-прочность» или по условию выхода определяющего параметра за поле допуска (см. лаб. работы № 1, 2). Постепенная деградация свойств элементов вызывает изменение определяющего параметра элемента y по случайному нестационарному закону $y(t)$. В этом случае одной из моделей изменения во времени определяющего параметра y является полиномиальная модель

$$y(t) = \sum_{v=0}^n a_v \cdot t^v, \quad (3.4)$$

где коэффициенты a_v являются случайными величинами, изменяющимися от изделия к изделию.

Если задано допустимое значение y_d определяющего параметра, то из уравнения

$$y_d = \sum_{v=0}^n a_v \cdot t^v \quad (3.5)$$

можно выразить время наработки до параметрического отказа как функцию, зависящую от предельного допустимого значения определяющего параметра и случайных коэффициентов $\{a_v\}$, $v = 0 \dots n$ полинома (3.4):

$$t = \phi(y_d, a_0, a_1, \dots, a_n). \quad (3.6)$$

Зависимость (3.6) при известных законах распределения коэффициентов a_y определяет закон распределения времени наработки до параметрического отказа. Статистическое моделирование при этом сводится к генерированию случайных значений коэффициентов a_y и вычислению наработок до отказа по соотношению (3.6).

Например, случайный закон изменения параметра y имеет вид

$$y(t) = a_0 + a_1 \cdot t^2, \quad (3.7)$$

где коэффициенты a_0 и a_1 – нормальные случайные величины с известными математическими ожиданиями m_{a_0} , m_{a_1} и среднеквадратическими отклонениями σ_{a_0} , σ_{a_1} . Схема моделирования параметрических отказов по условию $y(t) > y_D$ показана на рис. 3.7.

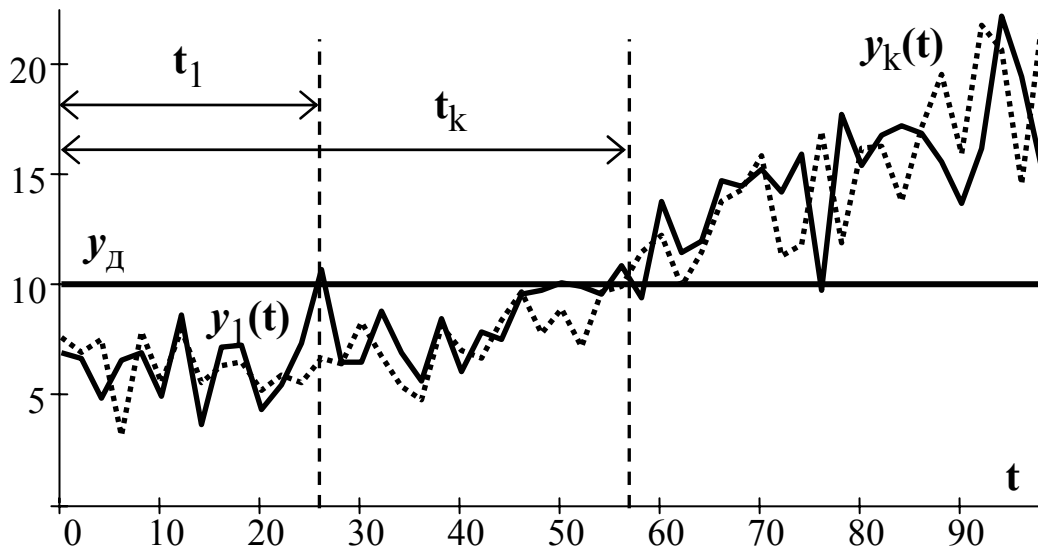


Рис. 3.7. Схема моделирования наработок до параметрического отказа

Приравняв выражение (3.7) к заданному допустимому значению y_D определяющего параметра, получим

$$t = \sqrt{\frac{y_D - a_0}{a_1}}. \quad (3.8)$$

Формула (3.8) позволяет по реализациям случайных величин $\{a_{0i}\}$, $\{a_{1i}\}$, $i = 0 \dots M - 1$ получить M случайных наработок до параметрического отказа. При использовании формулы (3.8) необходимо предусмотреть в программе обработку возможных ошибок типа деления на ноль $1/z$ при $z = 0$ или недопустимого (комплексного) типа результата вычисления \sqrt{z} при $z < 0$ (предполагаем, что z – случайная величина с ненулевыми вероятностями нулевых и отрицательных значений).

Например, для расчета $1/z$, где z – случайная величина с математическим ожиданием m_z ($m_z \neq 0$) можно использовать условное выражение

ЕСЛИ ($z \neq 0$), ТО ($1/z$), ИНАЧЕ ($1/m_z$),

а самый простой способ обеспечить реальный тип результата при вычислении \sqrt{z} – сформировать условие

ЕСЛИ ($z \geq 0$), ТО (\sqrt{z}), ИНАЧЕ (0),

согласно которому комплексные числа обнуляются.

Постановка задачи лабораторной работы

В этой лабораторной работе исследуют безотказность объектов, представленных надежностными схемами. Элементы 1, 2 и 3 этих схем имеют наработки до отказа, описываемые плотностями распределений $f(t_1)$, $f(t_2)$, $f(t_3)$; алгоритмы моделирования случайных наработок приведены в табл. 3.1.

Элемент 4 подвержен параметрическим отказам по степенному закону изменения определяющего параметра $y(t)$:

$$y_d = \sum_{v=0}^n a_v \cdot (t/b)^v,$$

где коэффициенты a_v подчиняются нормальному закону распределения с заданными математическим ожиданием ma_v и СКО σa_v ; b – константа, определяющая масштаб по времени.

При выполнении лабораторной работы необходимо разработать и реализовать в системе Mathcad алгоритмы статистического моделирования наработок до отказа объекта в соответствии с заданным вариантом и сделать выводы относительно вида результирующего распределения.

Порядок выполнения лабораторной работы

1. В соответствии с вариантом задания и табл. 3.1 определим в Mathcad плотности распределения вероятностей наработок до отказа элементов 1, 2, 3 и соответствующие функции генераторов.

Например, при экспоненциальном распределении

$$fE(z, \lambda) := \lambda \cdot e^{-\lambda \cdot z} \quad \text{Expon}(\lambda) := -\frac{1}{\lambda} \cdot \ln(\text{rnd}(1))$$

При распределении Рэлея

$$fR(z, \lambda) := \frac{z}{\lambda^2} \cdot \exp\left(-\frac{z^2}{2 \cdot \lambda^2}\right) \quad \text{Rel}(\lambda) := \lambda \cdot \sqrt{-2 \cdot \ln(\text{rnd}(1))}$$

При распределении Вейбулла

$$fB(z, a, b) := \frac{a}{b} \cdot \left(\frac{z}{b}\right)^{a-1} \cdot e^{-\left(\frac{z}{b}\right)^a} \quad B(a, b) := b \cdot (-\ln(\text{rnd}(1)))^{\frac{1}{a}}$$

При нормальном распределении

$$fN(z, m, \sigma) := \frac{1}{\sqrt{2 \cdot \pi} \cdot \sigma} \cdot e^{-\frac{(z-m)^2}{2 \cdot \sigma^2}}$$

$$\text{Norm}(m, \sigma) := \left(\sum_{k=1}^{48} \text{rnd}(1) - 24 \right) \cdot \frac{\sigma}{2} + m$$

При логарифмически нормальном распределении

$$fL(z, m, \sigma) := \frac{1}{\sqrt{2 \cdot \pi} \cdot \sigma \cdot z} \cdot e^{-\frac{\ln\left(\frac{z}{m}\right)^2}{2 \cdot \sigma^2}}$$

$$\text{LN}(m, \sigma) := m \cdot \exp\left(\sigma \cdot \sqrt{-2 \cdot \ln(\text{rnd}(1))} \cdot \cos(2 \cdot \pi \cdot \text{rnd}(1))\right)$$

2. Качество работы генераторов проверим путем сравнения гистограммы распределения результатов моделирования с плотностью соответствующего теоретического распределения.

Зададим в Mathcad: **N** – объем выборки; **M** – количество точек для построения графиков:

$$N := 500 \quad M := 100$$

Определим соответствующие переменные циклов:

$$i := 0..N-1 \quad j := 0..M-1$$

Для примера проанализируем качество работы функции-генератора экспоненциально распределенной величины.

Зададим значение параметра экспоненциального распределения

$$\lambda := 0.04$$

Получим результаты моделирования – массив реализаций

$$X_i := \text{Expon}(\lambda)$$

Чтобы построить гистограмму распределения, можно использовать встроенную функцию **histogram(K, X)**, которая возвращает матрицу **H** размером **K × 2**, где **K** – количество интервалов гистограммы.

Определим

$$K := 20 \quad H := \text{histogram}(K, X)$$

Первый столбец $\mathbf{H}^{(0)}$ содержит средние точки \mathbf{K} интервалов равной ширины в диапазоне $[\mathbf{X}_{\min}, \mathbf{X}_{\max}]$, второй, $\mathbf{H}^{(1)}$, – абсолютные частоты попадания значений из массива \mathbf{X} в эти интервалы.

Найдем ширину интервалов гистограммы как разность между двумя соседними элементами первого столбца $\mathbf{H}^{(0)}$, например:

$$\Delta x := (\mathbf{H}^{(0)})_1 - (\mathbf{H}^{(0)})_0$$

Чтобы получить оценку плотности распределения, нужно выполнить нормировку гистограммы – разделить значения $\mathbf{H}^{(0)}$ на объем выборки \mathbf{N} и на ширину интервала Δx (рис. 3.8).

Для построения графика экспоненциальной плотности распределения определим массив, состоящий из \mathbf{M} точек $\{x_j\}$, расположенных с равным шагом в том же диапазоне значений, что и гистограмма:

$$X_{\max} := \max(\mathbf{X}) \quad X_{\min} := \min(\mathbf{X}) \quad x_j := X_{\min} + \frac{X_{\max} - X_{\min}}{\mathbf{M} - 1} \cdot j$$

Рассчитаем значения плотности экспоненциального распределения в точках $\{x_j\}$, результаты расчета сохраним в массиве

$$y_j := fE(x_j, \lambda)$$

Построим гистограмму распределения и совместим ее с графиком теоретической плотности, как показано на рис. 3.8. Сравнение форм теоретического и эмпирического распределений позволяет сделать предварительный вывод об адекватности полученных результатов.

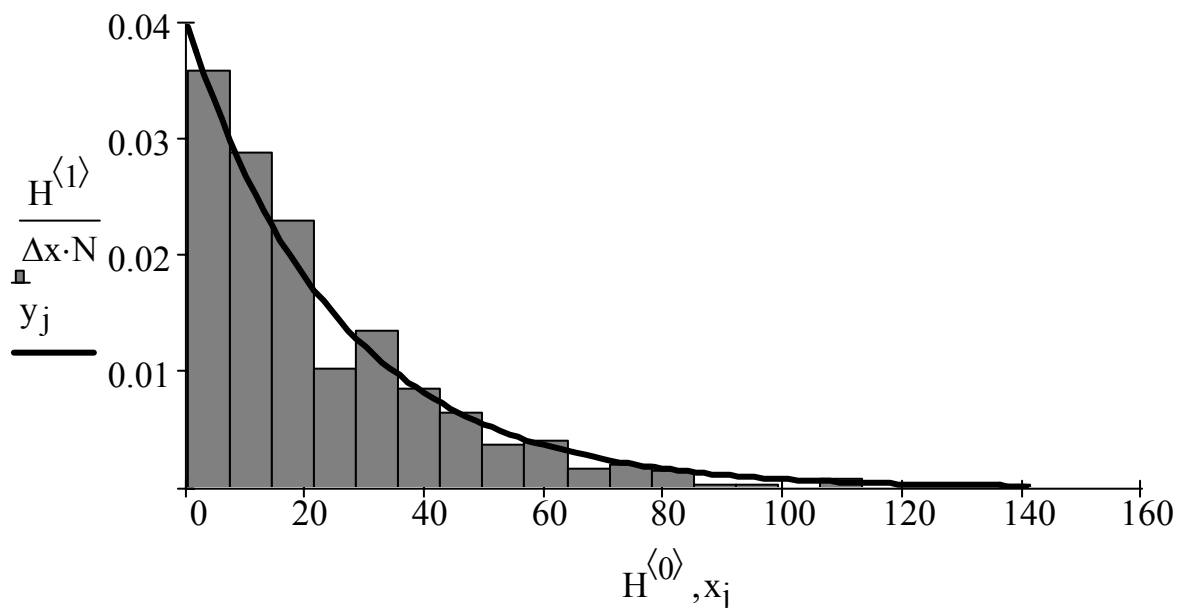


Рис. 3.8. Плотность экспоненциального распределения при $\lambda = 0.04$ и гистограмма результатов моделирования

Напомним, что для количественной проверки адекватности используют различные критерии, в частности, критерий Пирсона (или χ^2).

3. Сохраним результаты моделирования случайных наработок до отказа первого элемента $\{X_i\}$ в массиве с другим именем, например,

$$t1_i := X_i$$

Выполним моделирование наработок до отказа и качественную проверку адекватности полученных результатов поочередно для элементов 2 и 3 в соответствии с п. 2. Сформируем массивы $t1$, $t2$, $t3$ – наработки до отказа элементов 1, 2 и 3.

В качестве справочной информации на рис. 3.9 – 3.12 показаны графики теоретических плотностей остальных используемых в лабораторной работе распределений и гистограммы результатов моделирования соответствующих случайных величин.

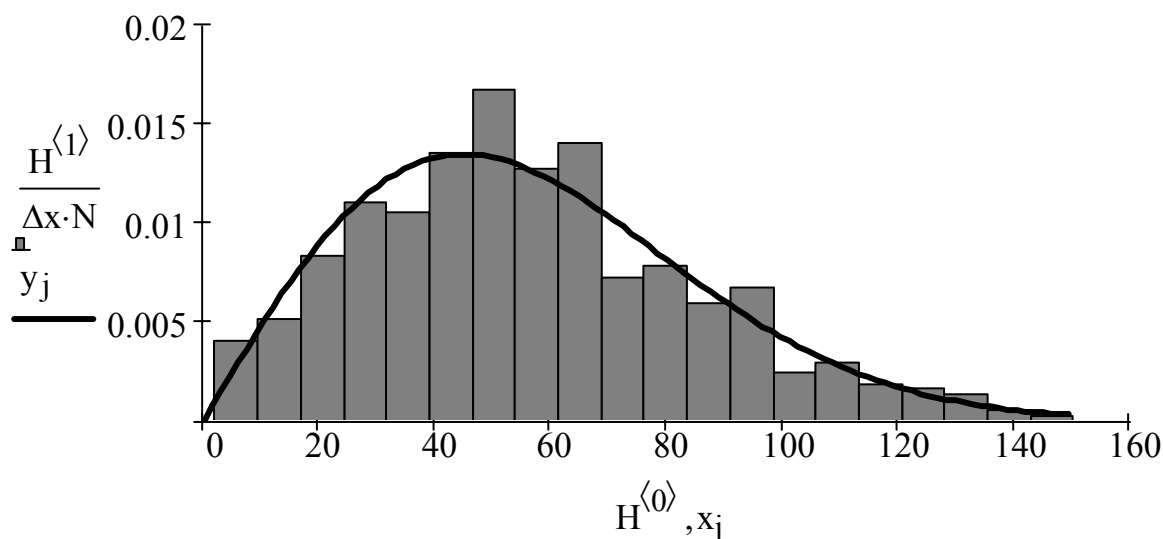


Рис. 3.9. Плотность распределения Рэля и гистограмма результатов моделирования с помощью функции $\mathbf{Rel}(\lambda)$

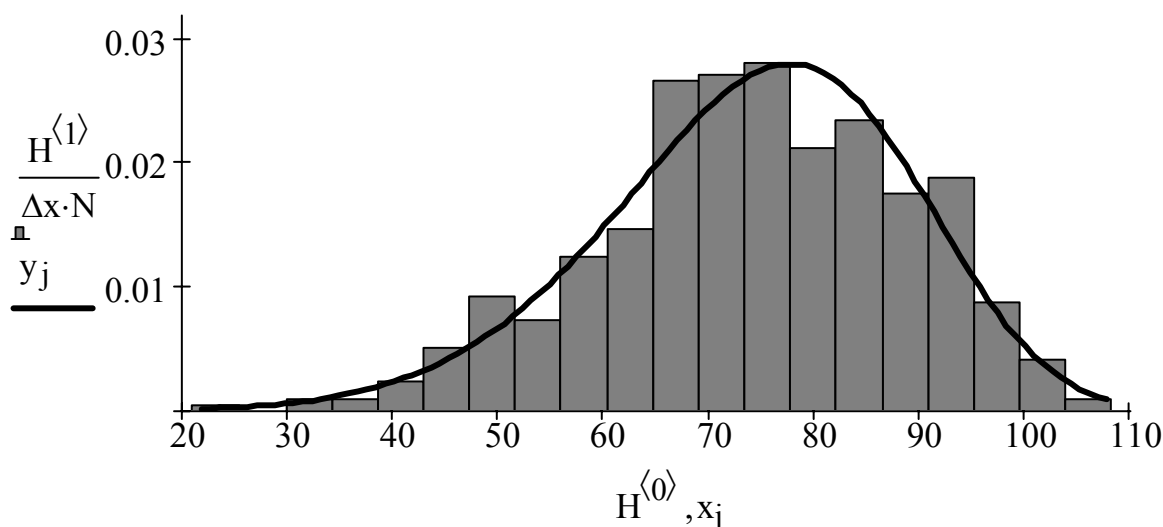


Рис. 3.10. Плотность распределения Вейбулла и гистограмма результатов моделирования с помощью функции $\mathbf{B}(a, b)$

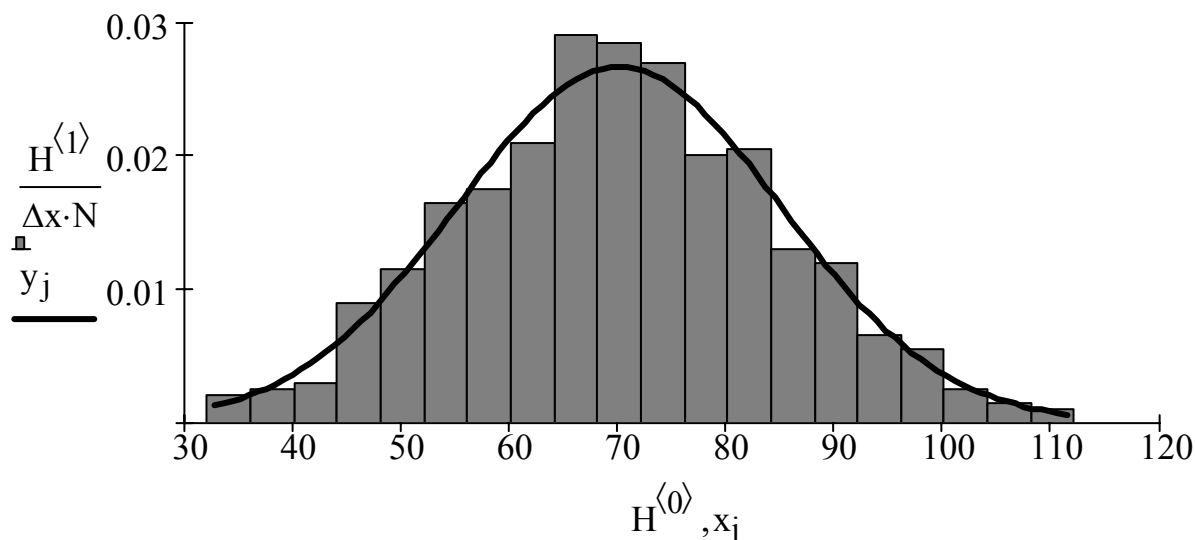


Рис. 3.11. Плотность нормального распределения и гистограмма результатов моделирования с помощью функции **Norm(m, σ)**

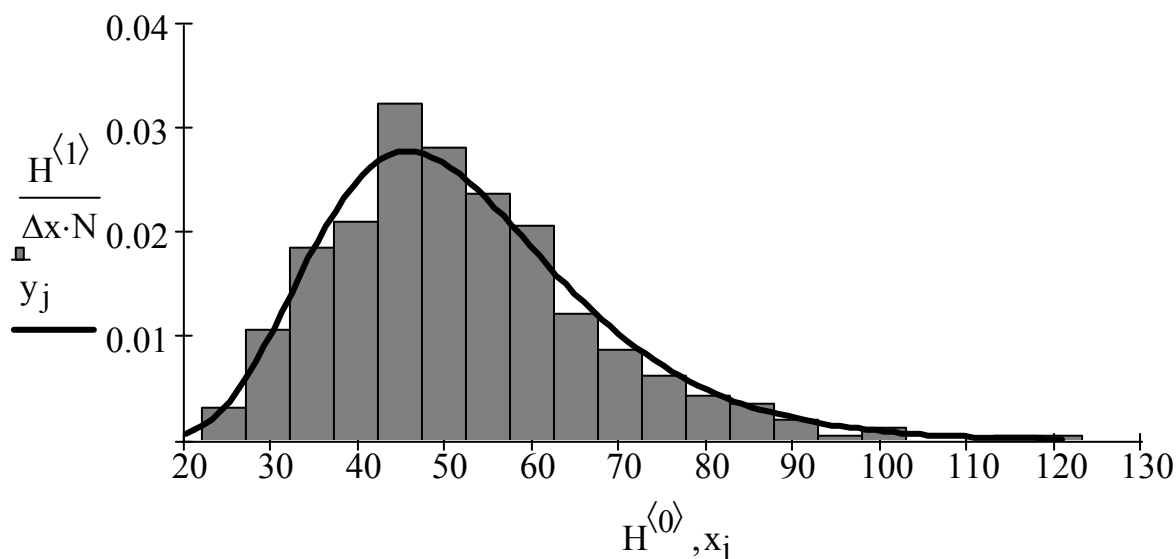


Рис. 3.12. Плотность логарифмически нормального распределения и гистограмма результатов моделирования с помощью функции **LN(m, σ)**

4. В соответствии с вариантом задания составим подпрограмму генерации случайных наработок до параметрического отказа элемента 4.

Например, закон изменения определяющего параметра элемента 4 имеет вид $y(t) = a_0 + a_1 \cdot t^2$. Тогда время наработки до параметрического отказа определим по формуле $t = \sqrt{(y_d - a_0)/a_1}$, где коэффициенты a_0 и a_1 – нормальные случайные величины.

Зададим значения параметров нормального распределения:

$$mA_0 := 5 \quad \sigma A_0 := 1.5$$

$$mA_1 := 0.6 \quad \sigma A_1 := 0.1$$

Зададим допустимую величину определяющего параметра

$$y_d := 10$$

и коэффициент масштаба по времени

$$B := 20$$

Сгенерируем N реализаций случайных коэффициентов a_0 и a_1 :

$$A_{0_i} := \text{Norm}(mA_0, \sigma A_0) \quad A_{1_i} := \text{Norm}(mA_1, \sigma A_1)$$

Проверим устойчивость генератора (см. формулу (3.8)). Прежде всего по правилу трех сигм установим размах случайных величин a_0 и a_1 :

$$A_{0\max} := mA_0 + 3 \cdot \sigma A_0 \quad A_{0\min} := mA_0 - 3 \cdot \sigma A_0$$

$$A_{1\max} := mA_1 + 3 \cdot \sigma A_1 \quad A_{1\min} := mA_1 - 3 \cdot \sigma A_1$$

Получим:

$$A_{0\max} = 9.5 \quad A_{0\min} = 0.5$$

$$A_{1\max} = 0.9 \quad A_{1\min} = 0.3$$

Поскольку наиболее вероятные значения a_1 (знаменателя выражения (3.8)) находятся в диапазоне от 0.3 до 0.5, ошибка типа деления на ноль маловероятна.

При максимальном значении a_0 (из числа наиболее вероятных значений) найдем

$$y_d - A_{0\max} = 0.5$$

Таким образом, и знаменатель, и числитель дроби (3.8) – положительные величины; наработки до отказа, определяемые как корни квадратные из положительных чисел будут положительными переменными вещественного типа.

Следовательно, дополнительные условия для обработки ошибок, возникающих при подстановке полученных данных в формулу (3.8), не нужны.

Запишем в Mathcad формулу генератора:

$$t4_i := \sqrt{\frac{y_d - A_{0_i}}{A_{1_i}}}$$

С учетом коэффициента масштаба по времени B сформируем массив реализаций наработок до параметрического отказа элемента 4:

$$t4_i := t4_i \cdot B$$

Результаты моделирования показаны на рис. 3.13, а гистограмма распределения выборочных данных – на рис. 3.14 (изображены не относительные, а абсолютные частоты попаданий реализаций в интервалы гистограммы).

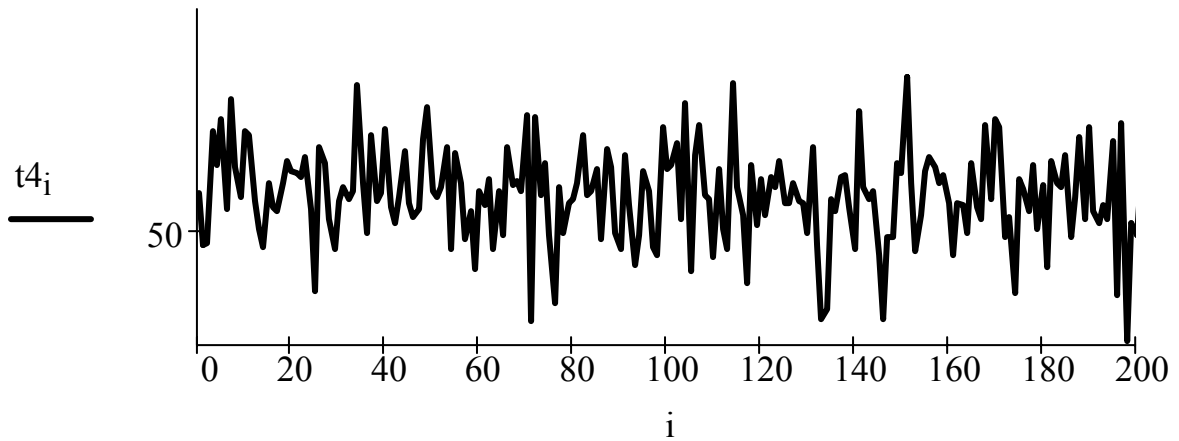


Рис. 3.13. График реализаций наработок до параметрического отказа элемента 4

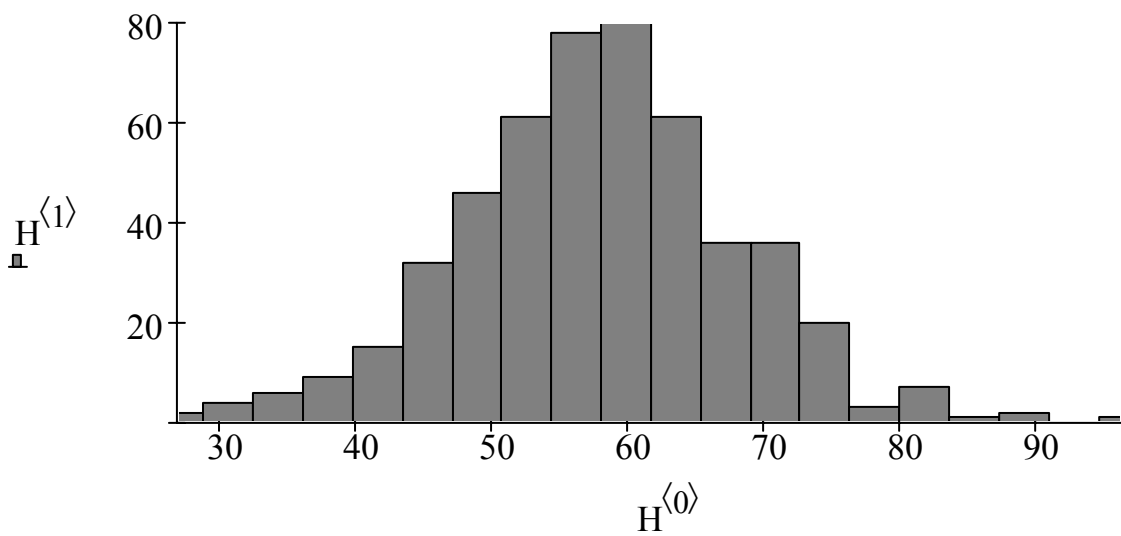


Рис. 3.14. Гистограмма частот попаданий наработок до параметрического отказа

5. Составим алгоритм моделирования наработок до отказа всего объекта в соответствии с видом соединения элементов 1 – 4.

Реализуем полученный алгоритм, выполнив генерацию N наработок до отказа. Например,

$$t_i := \min(\max(t_{1i}, t_{2i}), \max(t_{3i}, t_{4i}))$$

Результаты моделирования показаны на рис. 3.15.

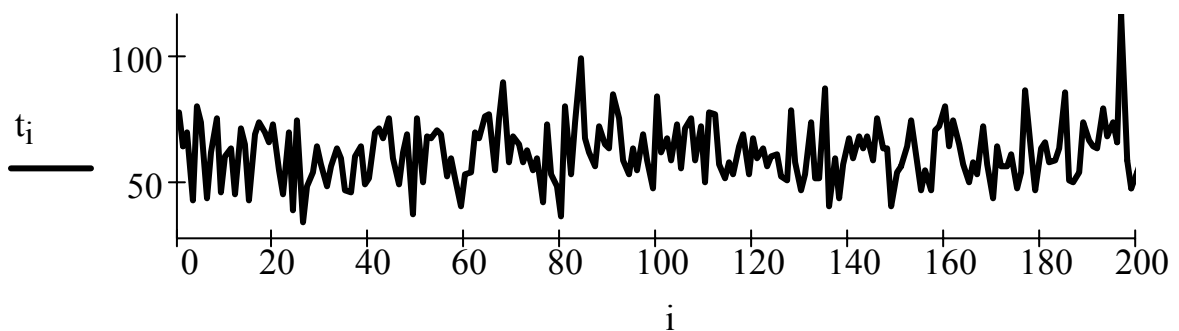


Рис. 3.15. График реализаций наработок отказа сложного объекта

6. Выполним статистический анализ результатов моделирования с помощью встроенных функций Mathcad.

Определим размах выборки:

$$X_{\max} := \max(t) \quad X_{\min} := \min(t)$$

$$X_{\max} = 116.5 \quad X_{\min} = 28.5$$

Найдем оценки математического ожидания и СКО:

$$mt := \text{mean}(t) \quad \sigma t := \text{Stdev}(t)$$

$$mt = 62.3 \quad \sigma t = 12.2$$

Построим гистограмму распределения наработок до отказа $\{t_i\}$ с помощью функции **histogram(•,•)**:

$$H := \text{histogram}(K, t)$$

Найдем ширину интервалов гистограммы:

$$\Delta x := (H^{(0)})_1 - (H^{(0)})_0$$

Выполним нормировку гистограммы (см. п. 2) и построим ее график.

7. По виду гистограммы (рис. 3.16) сделаем вывод о характере распределения наработки до отказа. Можно предположить, что наработка до отказа объекта распределена по нормальному закону.

Построим график плотности нормального распределения с параметрами mt и σt , совместив его с гистограммой распределения (рис. 3.16):

$$ft(z) := fN(z, mt, \sigma t)$$

$$x_j := X_{\min} + \frac{X_{\max} - X_{\min}}{M - 1} \cdot j$$

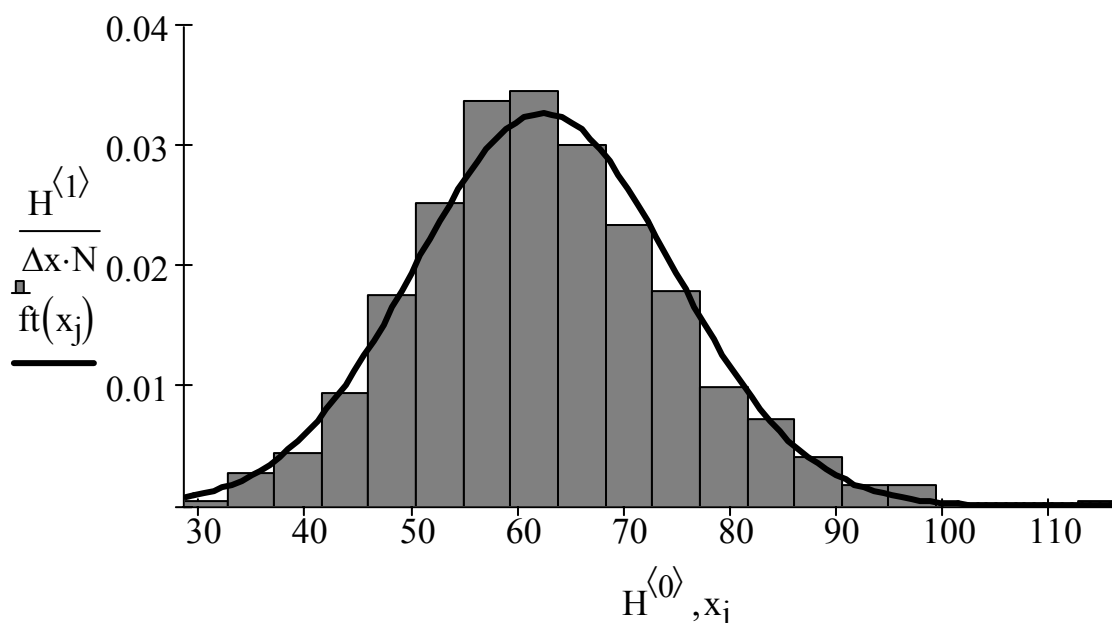


Рис. 3.16. Плотность нормального распределения и гистограмма результатов моделирования наработок до отказа сложного объекта

Надежностные схемы объектов (по вариантам заданий) и параметры распределений наработок до отказа элементов 1 – 3 даны в табл. 3.2.

Данные для моделирования наработок до параметрического отказа элемента 4 (по вариантам заданий) – вид закона изменения определяющего параметра $y(t)$, параметры нормального распределения коэффициентов a_v (математическое ожидание ma_v и СКО σa_v), значение масштабирующего коэффициента b и допустимое значение определяющего параметра y_d приведены в табл. 3.3.

Таблица 3.2

Данные к вариантам заданий

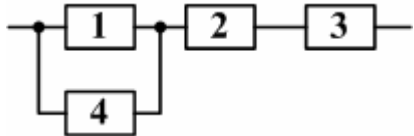
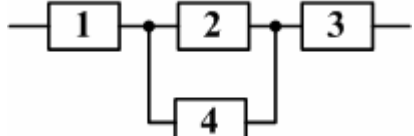
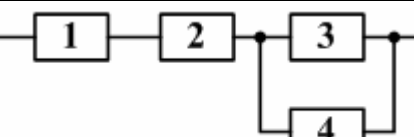
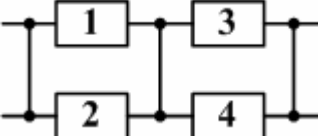
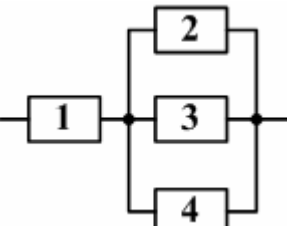
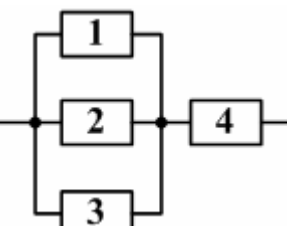
Номер варианта	Надежностная схема объекта испытаний	$f(t_1)$	$f(t_2)$	$f(t_3)$
1 2		$N(50; 5)$	$Re(45)$	$B(5; 50)$
		$L(100; 0.1)$	$E(0.05)$	$N(60; 10)$
3 4		$Re(50)$	$B(10; 100)$	$L(80; 0.2)$
		$E(0.03)$	$N(80; 10)$	$Re(40)$
5 6		$B(5; 100)$	$L(60; 0.3)$	$E(0.04)$
		$N(70; 15)$	$E(0.06)$	$Re(50)$
7 8		$L(50; 0.3)$	$B(6; 80)$	$N(50; 8)$
		$Re(35)$	$E(0.06)$	$L(70; 0.2)$
9 10		$B(5; 80)$	$Re(45)$	$E(0.05)$
		$L(65; 0.3)$	$N(75; 10)$	$Re(55)$
11 12		$B(10; 90)$	$E(0.03)$	$N(65; 10)$
		$E(0.04)$	$L(85; 0.2)$	$Re(40)$

Таблица 3.3

Данные для моделирования параметрической надежности
элемента 4

Номер варианта	$y(t)$	ma_0	σa_0	ma_1	σa_1	b	y_d
1	$a_0 + a_1 \cdot t/b$	7	1.5	1	0.2	10	11
2	$a_0 + a_1 \cdot (t/b)^2$	5	1.5	0.5	0.1	20	7
3	$a_0 + a_1 \cdot (t/b)^3$	5	1	0.4	0.15	30	10
4	$a_0 - a_1 \cdot t/b$	4	1.5	0.6	0.1	10	0
5	$a_0 - a_1 \cdot (t/b)^2$	6	2	0.4	0.1	20	1
6	$a_0 - a_1 \cdot (t/b)^3$	10	2	0.5	0.2	30	2
7	$a_0 + a_1 \cdot t/b$	5	1.5	1	0.3	10	8
8	$a_0 + a_1 \cdot (t/b)^2$	6	1	1	0.5	20	10
9	$a_0 + a_1 \cdot (t/b)^3$	15	2	0.5	0.1	30	20
10	$a_0 - a_1 \cdot t/b$	5	1.5	1	0.2	10	1
11	$a_0 - a_1 \cdot (t/b)^2$	5	1	0.5	0.2	20	0
12	$a_0 - a_1 \cdot (t/b)^3$	6	2	1	0.3	30	1

Содержание отчета

Отчет о лабораторной работе должен содержать:

- надежность схему объекта;
- исходные данные для моделирования (вид и параметры законов распределения наработок до отказа, вид функции $y(t)$ с коэффициентами a_v);
- алгоритмы и программы моделирования наработок до отказа как отдельных элементов, так и объекта в целом;
- результаты реализации программ моделирования;
- результаты статистического анализа полученных результатов;
- гистограммы распределений результатов моделирования, совмещенные с плотностями соответствующих распределений;
- вывод о характере распределения времени наработки до отказа сложного объекта.

Контрольные вопросы

1. Получите соотношения для расчета вероятности безотказной работы типовых надежных соединений элементов: последовательного, параллельного, мостикового.

2. Запишите выражение вероятности безотказной работы для заданной преподавателем комбинированной схемы.

3. Получите алгоритм моделирования времени наработки до отказа объекта по заданной надежной схеме.

4. По заданному преподавателем алгоритму генерирования наработок до отказа постройте соответствующую надежную схему соединения элементов.

5. По методу обратной функции найдите алгоритм моделирования случайной величины x с заданной плотностью распределения вероятностей $f(x)$.

6. Каким образом определяют усеченные распределения?

7. Вычислите константу нормировки усеченного в интервале $[0, 5]$ нормального распределения с параметрами $m = 10$, $\sigma = 5$.

8. Как моделируют параметрические отказы?

9. Допустим, закон изменения во времени определяющего параметра описывается уравнением $y(t) = a \cdot t^2 + b \cdot t$, где коэффициенты a и b – случайные величины с нормальным распределением. Запишите алгоритм формирования случайных наработок до параметрического отказа. Какие дополнительные условия нужно обеспечить для устойчивой работы полученного алгоритма?

10. Приведите формулы, связывающие вероятность безотказной работы $P(t)$ с другими показателями безотказности.

11. Пользуясь рис. 3.17, определите:

- а) среднюю наработку до отказа T ;
- б) среднюю интенсивность отказов λ ;
- в) вероятность безотказной работы в момент времени $t = 60$;
- г) вероятность возникновения отказа $P_0(t)$ во временном интервале от 30 до 80.

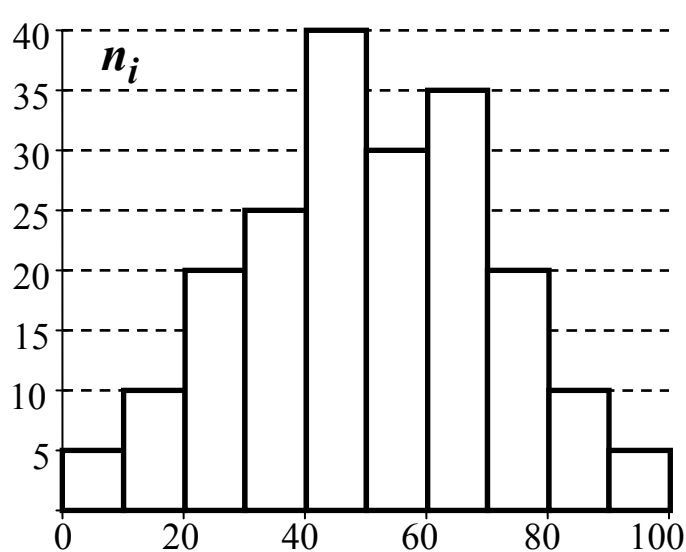


Рис. 3.17. Гистограмма частот попаданий случайной величины t в интервалы

Лабораторная работа № 4

ПОСТРОЕНИЕ РЕГРЕССИОННЫХ МОДЕЛЕЙ ОБЪЕКТОВ. АКТИВНЫЙ ОПТИМАЛЬНЫЙ ЭКСПЕРИМЕНТ

Цель работы:

- изучить методику планирования, проведения и обработки данных активного оптимального эксперимента и построения регрессионной модели выходных параметров радиотехнического объекта на примере полного факторного эксперимента;
- получить навыки в практическом планировании, проведении и статистической обработке данных эксперимента.

Необходимые теоретические сведения

Показатели качества технических объектов (электронных средств, технологических процессов) зависят от ряда физических, химических, электрических и других факторов, например, температуры окружающей среды, величины питающего напряжения, номиналов электрорадиоэлементов и т.д. Знание этих функциональных зависимостей необходимо для назначения допусков, выбора оптимальных режимов и т.п. В большинстве случаев влияние таких факторов теоретически можно описать весьма приближенно, поэтому возникает необходимость экспериментального определения связей между независимыми переменными – факторами x_i – и зависимой переменной – откликом системы y .

Рассмотрим формализованную общую схему эксперимента. Пусть некоторая система имеет k контролируемых входов $\vec{X} = (x_1, \dots, x_k)$, называемых *факторами*. Вектор \vec{X} представим точкой в k -мерном пространстве переменных x_j (в *факторном пространстве*). Обозначим: i – номер опыта ($i = 1 \dots n$); x_{ij} – уровень j -го фактора в i -м опыте.

Эксперимент называют *активным*, если исследователь по своему усмотрению может изменять значения (уровни) факторов. В противном случае (если исследователь лишь контролирует уровни факторов, но не управляет ими) эксперимент называют *пассивным*.

Система имеет также γ входов $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_\gamma$ – случайных воздействующих факторов, управлять которыми в силу их случайности исследователь не может.

Пусть исследуемая система характеризуется $(\nu + 1)$ выходными параметрами $y, v_1, v_2, \dots, v_\nu$, причем y – основной параметр (в частности, показатель эффективности).

Основной выходной параметр y (наблюдаемая переменная) является скалярной величиной; при этом предполагают следующую модель наблюдения:

$$y = \psi(\vec{X}) + \varepsilon(\vec{X}), \quad (4.1)$$

где $\psi(\vec{X})$ – функция отклика (неслучайная функция факторов); $\varepsilon(\vec{X})$ – ошибка опыта (случайная величина, распределение которой определяется значением вектора \vec{X} , причем $M\{\varepsilon(\vec{X})\} = 0$).

Очевидно, y является случайной переменной, так как зависит от случайной величины $\varepsilon(\vec{X})$.

Остальные выходные параметры $\{v_k\}$ в общем случае также зависят от входов и в процессе эксперимента должны находиться в некоторых пределах, задаваемых, например, системой неравенств

$$\varphi_\alpha[v_k(\vec{X})] \leq 0, \quad \alpha = 1 \dots a, \quad k = 1 \dots v. \quad (4.2)$$

Система неравенств (4.2) выделяет в факторном пространстве область эксперимента G (область допустимых значений факторов).

Функция отклика $\psi(\vec{X})$ математически отражает механизм изучаемого явления (поведение исследуемой системы).

Общая задача эксперимента – получение информации о функции отклика при ограниченных затратах.

В процессе экстремального эксперимента при фиксированных значениях управляемых факторов регистрируют значение переменной y . По значению (или по нескольким значениям) этой переменной, полученному опытным путем, можно лишь приближенно оценить функцию отклика. Значение этой функции в фиксированной точке $x_1^*, x_2^*, \dots, x_k^*$ факторного пространства равно условному математическому ожиданию наблюдаемой переменной y в этой точке, т. е.

$$\psi(\vec{X}^*) = M\{y(\vec{X}^*)\}, \quad (4.3)$$

так как по предположению $M\{\varepsilon(\vec{X})\} = 0$.

В статистике функция, связывающая условное математическое ожидание случайной переменной y с контролируруемыми переменными \vec{X} , называется *регрессией*.

Часто структура регрессионной модели из теоретических предположений или из предшествующего опыта известна, а параметры модели θ_i не известны и должны быть определены в результате регрессионного эксперимента.

Выделяют следующие разновидности регрессионных моделей:

– линейную по переменным и параметрам:

$$y = a_0 + a_1 x_1 + a_2 x_2 + \dots + a_k x_k;$$

– линейную по параметрам, но нелинейную по переменным:

$$y = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_k x^k;$$

– линейную по переменным, но нелинейную по параметрам:

$$y = a_0 + a_1 a_2 x_1 + a_1 x_2 + a_3 x_3 + \dots;$$

– нелинейную по переменным и параметрам, например:

$$y = \exp(a_1 x_1) + \exp(a_2 x_2).$$

Линейную по параметрам модель в общем виде можно представить как

$$y = a_0 f_0(\bar{x}) + a_1 f_1(\bar{x}) + \dots,$$

где $\bar{x}^T = (x_1, \dots, x_k)$, T – символ транспонирования.

Если функциональная структура зависимости $\psi(\bar{X})$ неизвестна, то ее можно записать в виде ряда Тейлора в окрестности опорной точки \bar{x}_0 :

$$\psi(\bar{X}) = \alpha_0 + \sum_{j=1}^k \alpha_j x_j + \sum_{j<l} \alpha_{jl} x_j x_l + \sum_{j=1}^k \alpha_{jj} x_j^2 + \dots, \quad (4.4)$$

где $\alpha_0, \alpha_j, \alpha_{jl}, \alpha_{jj}$ – неизвестные коэффициенты регрессии.

Функцию отклика $\psi(\bar{X})$ считают полностью известной, если определены все коэффициенты α , входящие в формулу (4.4).

Вследствие влияния на результаты эксперимента случайных факторов $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_\gamma$ истинные значения коэффициентов регрессии (4.4) могут быть оценены лишь приблизительно, т. е. может быть построена лишь приближенная функция $\Phi(\bar{X}) \approx \psi(\bar{X})$, которую определяют по результатам проведения эксперимента и записывают в виде степенного полинома первого, второго, реже – третьего порядка:

$$\hat{y} = \Phi(\bar{X}) = a_0 + \sum_{j=1}^k a_j x_j + \sum_{j<l} a_{jl} x_j x_l + \sum_{j=1}^k a_{jj} x_j^2 + \dots, \quad (4.5)$$

где a_0, a_j, a_{jl}, a_{jj} – статистические оценки коэффициентов α , полученные с помощью метода наименьших квадратов. Этот метод позволяет получить эффективные оценки коэффициентов регрессии, если ошибка опыта $\varepsilon(\bar{X})$, а следовательно, и переменная y имеют нормальное распределение.

В выражение (4.5) можно ввести новые обозначения переменных $x_0 \equiv 1, x_j = x_j, j = 1 \dots k, x_1 x_2 = x_{k+1}, \dots$ и свести модель поверхности отклика $\hat{y} = \Phi(\bar{X})$ к виду линейной по параметрам модели:

$$y = \sum_{j=0}^{M-1} a_j x_j, \quad (4.6)$$

где x_0 – «фиктивная» переменная; M – полное количество переменных и коэффициентов модели.

Например, регрессионную модель зависимости выходного параметра от трех независимых входных факторов $y = \Phi(x_1, x_2, x_3)$ можно записать в виде полинома первого порядка:

$$y = a_0 + a_1 x_1 + a_2 x_2 + a_3 x_3 + a_4 x_1 x_2 + a_5 x_2 x_3 + a_6 x_1 x_3 + a_7 x_1 x_2 x_3 = \sum_{j=0}^7 a_j x_j,$$

где $x_0 = 1$; $x_4 = x_1 x_2$; $x_5 = x_2 x_3$; $x_6 = x_1 x_3$; $x_7 = x_1 x_2 x_3$.

Модели с известной структурой регрессионной зависимости также могут быть сведены к виду (4.6) в окрестности точки \bar{x}_0 .

Таким образом, модель (4.6) является универсальной и в небольших диапазонах изменения переменных x_i хорошо соответствует действительному поведению функции $y(x_i)$.

Особенностью любого эксперимента являются случайные помехи и погрешности в измерении переменных. Дисперсия наблюдаемой переменной y равна дисперсии ошибки опыта, т.е. $D_y = \sigma_y^2 = \sigma^2 \{\varepsilon\}$.

D_y называют *дисперсией воспроизводимости* эксперимента. Она характеризует качество эксперимента (при $D_y = 0$ эксперимент называют идеальным). При проведении опытов необходимо обеспечить равные значения дисперсий реализаций выходного параметра $D\{y_i\}$.

Пусть для оценки функции отклика предполагают провести n измерений выходного параметра y . Область проведения эксперимента устанавливают на основе априорной информации об исследуемом объекте.

Результаты экспериментов можно представить в матричном виде

$$\bar{y} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}, \mathbf{X} = \begin{bmatrix} x_{11} & x_{21} & \dots & x_{k1} \\ x_{12} & x_{22} & \dots & x_{k2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ x_{1n} & x_{2n} & \dots & x_{kn} \end{bmatrix}, \bar{\varepsilon} = \begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \dots \\ \varepsilon_n \end{bmatrix}, \quad (4.7)$$

где ε – обобщенная аддитивная погрешность (помеха), которую часто можно считать центрированной нормально распределенной величиной с распределением

$$f(\varepsilon) = N(\varepsilon; 0, \sigma_\varepsilon) = \frac{1}{\sqrt{2\pi} \cdot \sigma_\varepsilon} \exp\left\{-\frac{\varepsilon^2}{2 \cdot \sigma_\varepsilon^2}\right\}.$$

Набор n координат точек \bar{x} из множества допустимых значений G k -мерного факторного пространства $(x_{11}, \dots, x_{1k}), \dots, (x_{n1}, \dots, x_{nk})$, в которых будут проведены измерения (опыты), называется *планом эксперимента*. Столбцы плана-матрицы \mathbf{X} содержат значения варьируемых факторов, а строки – условия проведения опытов.

Матричные переменные в выражениях (4.7) связаны соотношением

$$\bar{y} = \mathbf{a}^T \cdot \mathbf{X} + \bar{\varepsilon}. \quad (4.8)$$

Применяя при решении уравнения (4.8) метод наименьших квадратов, получают оценку $\hat{\mathbf{a}}$ вектора $\bar{\mathbf{a}}$ неизвестных коэффициентов в виде

$$\hat{\mathbf{a}} = (\mathbf{X}^T \cdot \mathbf{X})^{-1} \cdot \mathbf{X}^T \cdot \bar{y}, \quad (4.9)$$

где информационная матрица $\mathbf{C} = (\mathbf{X}^T \cdot \mathbf{X})^{-1}$ определяет ковариационные свойства вектора оценок коэффициентов модели (при этом вектор $\{\hat{a}_i\}$ является случайным, так как случаен вектор \bar{y}) и, в частности, величины дисперсии или точность оценок коэффициентов a_i .

Для того, чтобы получить матрицу \mathbf{C} с заданными свойствами, необходимо формировать матрицу \mathbf{X} эксперимента по определенным правилам. Это приводит к различным планам активного эксперимента.

Факторный эксперимент – это план, в соответствии с которым все уровни каждого фактора встречаются в сочетании со всеми уровнями остальных факторов. Уровни определяют количественные значения факторов. Если количество уровней каждого фактора одинаково и равно L , то общее количество комбинаций уровней – L^k .

Минимальное количество уровней $L_{\min} = 2$ – нижнее и верхнее предельные значения фактора. В этом случае можно определить только линейные эффекты (т.е. построить линейные регрессионные модели). Для учета квадратичных эффектов необходимо использовать три уровня, для кубических – четыре и т. д.

Полный факторный эксперимент (ПФЭ) позволяет количественно оценить все линейные эффекты факторов $\bar{X} = \{x_j\}$, $j = 1 \dots k$ и эффекты взаимодействия факторов. Взаимодействие факторов возникает в том случае, если эффект одного фактора зависит от уровня, на котором находится другой фактор.

При проведении ПФЭ факторы варьируют на двух уровнях (рис. 4.1); каждый из k факторов x_j может быть установлен либо на верхнем (x_{jB}), либо на нижнем уровне (x_{jH}), которые расположены симметрично относительно некоторого нулевого уровня (x_{j0}). В этом случае количество точек, в которых проводят опыты, равно 2^k .

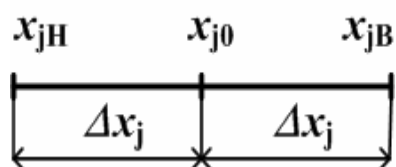


Рис. 4.1. Уровни варьирования фактора

Нулевые уровни каждого фактора представляют собой точку в допустимой области G , называемую *центром плана*.

Для указания значений факторов принято использовать такой код:

$$x_{jB} = +1 \text{ (или «+»), } x_{jH} = -1 \text{ (или «-»).$$

Переход к кодовым (нормированным) значениям факторов выполняют по формулам:

$$x'_j = \frac{x_j - x_{j0}}{\Delta x_j}, \quad x_{j0} = \frac{x_{jB} + x_{jH}}{2}, \quad \Delta x_j = \frac{x_{jB} - x_{jH}}{2}. \quad (4.10)$$

Выбор интервалов варьирования факторов Δx_j является важным этапом планирования эксперимента. С одной стороны, интервал варьирования не должен быть настолько мал, чтобы уровни факторов были неразличимы на фоне случайных воздействий $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_\gamma$, а с другой – не должен быть настолько велик, чтобы нелинейностью поверхности функции отклика нельзя было пренебречь.

План ПФЭ оформляют в виде матрицы эксперимента X . Матрица X является квадратной, размером $K \times M$, $K = M = 2^k$, где k – количество независимых факторов; M – полное количество переменных и коэффициентов модели; K – количество опытов, необходимых для оценки коэффициентов модели. Матрицу X формируют по определенным правилам:

- столбец «фиктивной» переменной x_0 заполняют значением 1 (записывают только знак «+», единица условно опускается);
- столбцы независимых факторов x_1, x_2, \dots, x_k заполняют значениями ± 1 (записывают только знак «+» или «-»);
- варьирование независимых переменных x_1, x_2, \dots, x_k осуществляется по правилу: частота смены знака («+» и «-») в каждом следующем столбце независимых факторов снижается в два раза по сравнению с предыдущим столбцом;
- столбцы произведений факторов ($x_j x_l, x_j x_l x_r$ и т. д.) получают почленным перемножением столбцов соответствующих факторов.

Матрица X , полученная таким образом, характеризуется свойствами:

- симметричности

$$\sum_{i=1}^K x_{ij} = 0;$$

- нормированности

$$\sum_{i=1}^K x_{ij}^2 = K;$$

- ортогональности

$$\sum_{i=1}^K x_{ij} x_{il} = 0 \text{ при } j \neq l;$$

- ротатабельности: дисперсия ошибки оценки значений функции отклика $\Phi(\vec{X})$ не зависит от направления градиента функции $\text{grad } \psi(\vec{X})$.

В этом случае оценки \hat{a}_i коэффициентов полинома оказываются не зависимыми друг от друга и одинаково точными.

В табл. 4.1 приведена матрица для расчета коэффициентов регрессии ПФЭ типа 2^2 с учетом взаимодействий факторов.

Таблица 4.1

План-матрица ПФЭ 2^2

Номер опыта	x_0	x_1	x_2	x_1x_2	y
1	+	-	-	+	y_1
2	+	+	-	-	y_2
3	+	-	+	-	y_3
4	+	+	+	+	y_4

Для устранения систематической погрешности эксперимента порядок проведения опытов рандомизируют с помощью датчика случайных чисел: каждой строчке плана присваивают случайный порядковый номер от 1 до K (повторяющиеся числа игнорируют).

ПФЭ проводят в соответствии с порядком после рандомизации, устанавливая значения независимых факторов x_1, x_2, \dots, x_k равными x_{jB} или x_{jH} согласно коду строки. По каждой строке плана измеряют значения выходного параметра; данные измерений заносят в столбец y . Если в каждой точке плана проводили не один, а серию опытов, то в матрицу ПФЭ вместо значения y_i следует подставлять среднее значение \bar{y}_i .

ПФЭ называется оптимальным, так как он дает возможность получить математическую модель объекта (в виде линейного полинома) при минимальном количестве опытов и с максимальной точностью описания факторного пространства.

Изучение основных положений методики планирования, проведения и обработки данных на примере ПФЭ и является целью этой работы.

Лабораторный макет

Объектом регрессионного анализа в лабораторной работе служит мультивибратор, предназначенный для генерации последовательности импульсов (рис. 4.2). Эта последовательность импульсов характеризуется следующими параметрами:

- амплитудой импульса A ;
- длительностью переднего фронта τ_ϕ ;
- длительностью импульса $\tau_{и}$;
- периодом T или частотой f следования импульсов, $f = 1/T$.

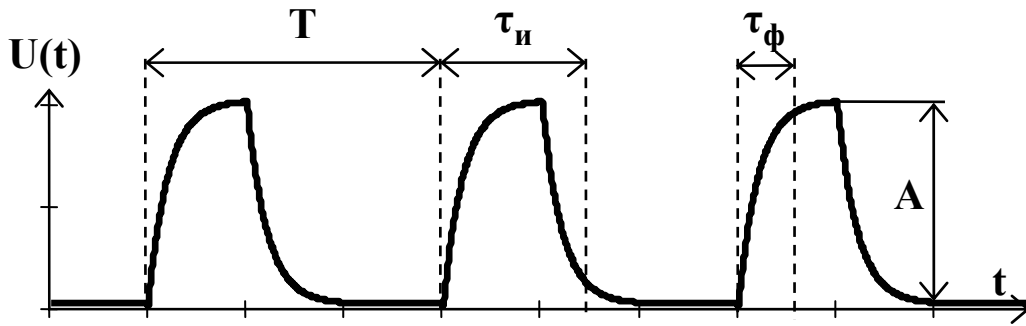


Рис. 4.2. Последовательность импульсов

Поскольку мультивибратор (рис. 4.3) состоит из двух активных (VT_1, VT_2) и восьми пассивных элементов ($R_1, \dots, R_6, C_1, C_2$), то каждый из указанных выше параметров импульсов является функцией параметров схемы

$$y = f(R_1, R_2, R_3, R_4, R_5, R_6, C_1, C_2),$$

или

$$y = f(x_i), i = 1 \dots 8.$$

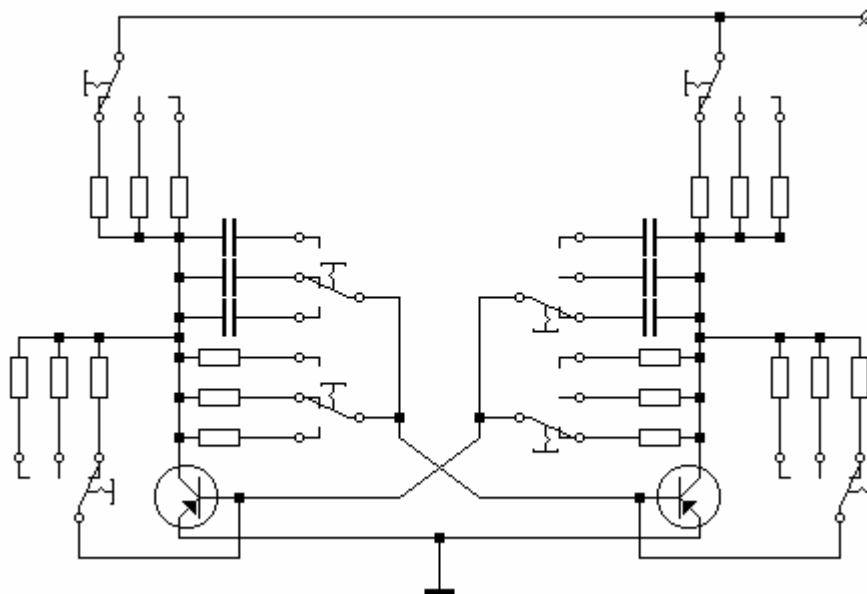


Рис. 4.3. Схема электрическая принципиальная мультивибратора

Каждый из факторов $R_1, \dots, R_6, C_1, C_2$ с помощью одного из восьми тумблеров в макете (см. рис. 4.4) может принимать три значения:

- $x_{i \min}$ – левое положение;
- x_{i0} – центральное положение;
- $x_{i \max}$ – правое положение.

При этом шаг варьирования параметров Δx_i находится в диапазоне от $0,1x_{i0}$ до $0,3x_{i0}$.

Кроме того, влияние активных элементов VT_1, VT_2 на выходные параметры мультивибратора (амплитуду, длительность переднего фронта, длительность импульса, частоту последовательности импульсов) моделируют с помощью тумблера на четыре положения, к контактным группам которого подключены четыре пары транзисторов одного типа. Вследствие технологического разброса параметров транзисторов значения выходных параметров мультивибратора случайным образом изменяются, что дает возможность получить в эксперименте четыре значения функции отклика $y_j = y + \varepsilon_j, j = 1 \dots 4$ при одних и тех же значениях входных факторов (пассивных элементов $R_1, \dots, R_6, C_1, C_2$).

Макет имеет выход для подключения измерительного прибора. Передняя панель макета показана на рис. 4.4.

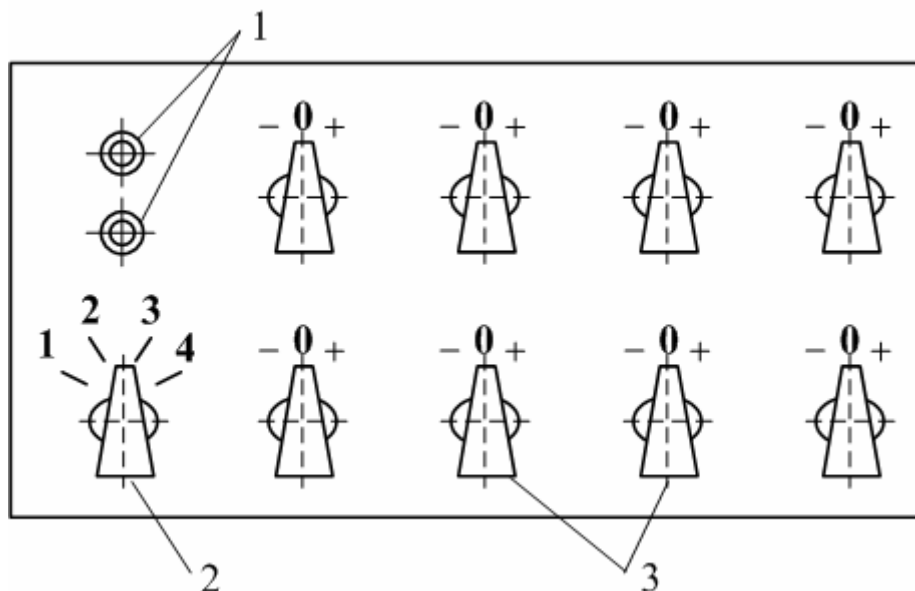


Рис. 4.4. Передняя панель макета:
1 – выход мультивибратора; 2 – переключатель пар транзисторов;
3 – переключатели входных параметров мультивибратора

Постановка задачи лабораторной работы

В лабораторной работе необходимо с помощью ПФЭ получить регрессионную модель зависимости одного из параметров выходного сигнала объекта исследования от трех независимых входных факторов $y = f(x_1, x_2, x_3)$ в виде полинома первого порядка:

$$y = a_0 + a_1 \cdot x_1 + a_2 \cdot x_2 + a_3 \cdot x_3 + a_{12} \cdot x_1 \cdot x_2 + a_{23} \cdot x_2 \cdot x_3 + a_{13} \cdot x_1 \cdot x_3 + a_{123} \cdot x_1 \cdot x_2 \cdot x_3. \quad (4.11)$$

Вид выходного параметра задает преподаватель. Факторы x_1, x_2, x_3 выбирают студенты в ходе предварительного эксперимента.

Содержание работы

А. Проведение предварительного эксперимента

Предварительный эксперимент проводят для выделения из восьми входных независимых факторов трех, наиболее влияющих на исследуемый выходной параметр, и он не является обязательным для методики.

Поочередно устанавливаем значение каждого фактора x_i равным сначала $x_{i\min}$, а затем – $x_{i\max}$ (тумблеры управления остальными факторами должны находиться в центральном положении) и фиксируем при этом значения выходной переменной $y(x_{i\min})$ и $y(x_{i\max})$. Определяем абсолютные величины изменения выходного параметра при варьировании факторов: $\Delta y_i = |y(x_{i\min}) - y(x_{i\max})|$. По трем наибольшим значениям Δy_i выбираем три самых влияющих фактора.

Полученные результаты заносим в табл. 4.2.

Таблица 4.2

Результаты предварительного эксперимента

i	1	2	3	4	5	6	7	8
$y(x_{i\min})$								
$y(x_{i\max})$								
Δy_i								

Б. Нормирование переменных

Выполняем переход от реальных независимых переменных x_i к нормированным переменным x'_i по соотношениям (4.10).

Тогда $x'_{i\min} = -1$, $x'_{i\max} = +1$.

Переходим к регрессионному полиному в нормированных переменных (штрих при переменных условно опущен):

$y = a_0 x_0 + a_1 x_1 + a_2 x_2 + a_3 x_3 + a_4 x_1 x_2 + a_5 x_2 x_3 + a_6 x_1 x_3 + a_7 x_1 x_2 x_3$,
или

$$y = \sum_{i=0}^7 a_i x_i.$$

В. Планирование ПФЭ 2^3

Составляем заготовку таблицы ПФЭ (табл. 4.3).

Столбец $x_0 \equiv 1$. Столбцы x_1 , x_2 , x_3 заполняем значениями ± 1 факторов (записываем только знак, единицу условно опускаем).

Таблица 4.3

Данные полного факторного эксперимента 2^3

Номер опыта	Номер после рандомизации	Значения факторов								Выходной параметр y_v				Данные обработки			
		x_0	x_1	x_2	x_3	$x_1 \cdot x_2$	$x_1 \cdot x_3$	$x_2 \cdot x_3$	$x_1 \cdot x_2 \cdot x_3$	y_1	y_2	y_3	y_4	m_{y_v}	D_{y_v}	\hat{y}_v	$ m_{y_v} - \hat{y}_v $
1																	
2																	
3																	
4																	
5																	
6																	
7																	
8																	
\hat{a}_i																	
t_i																	
a_{i3H}																	

Для обеспечения ортогональности плана эксперимента уровни независимых переменных в столбцах x_1, x_2, x_3 изменяем с разной частотой (x_1 – максимальная частота смены знака; x_2 – частота снижена в два раза по сравнению с x_1 ; x_3 – частота варьирования снижена в два раза по сравнению с x_2).

Определяем знаки в производных столбцах $x_i x_j$.

Для устранения систематической погрешности эксперимента порядок проведения опытов рандомизируем с помощью датчика целых случайных чисел, с равной вероятностью принимающих значение от 1 до 8.

Например, можно создать в Mathcad подпрограмму-функцию

```

random(K, N) :=
  for i ∈ 0 .. N - 1
    |
    | k ← 0
    | r ← rnd(1)
    | while r >  $\frac{k}{K}$ 
    |   | k ← k + 1
    |   | ni ← k
    | n
  
```

Аргументы функции: $K = 8$ – количество значений, которые принимает случайная величина «номер опыта», $\{1, 2, \dots, 8\}$; N – объем выборки.

Результаты, полученные с помощью функции **random(8,•)**, приведены в табл. 4.4, а эмпирическое распределение данных моделирования, близкое к равномерному закону, – на рис. 4.5 (штриховой линией условно показан уровень теоретической вероятности $P_k = 1/8 = 0.125$).

При рандомизации с помощью табл. 4.4 каждой строчке плана присваиваем случайный порядковый номер, встретившийся при произвольном движении по ячейкам таблицы (повторяющиеся числа игнорируем).

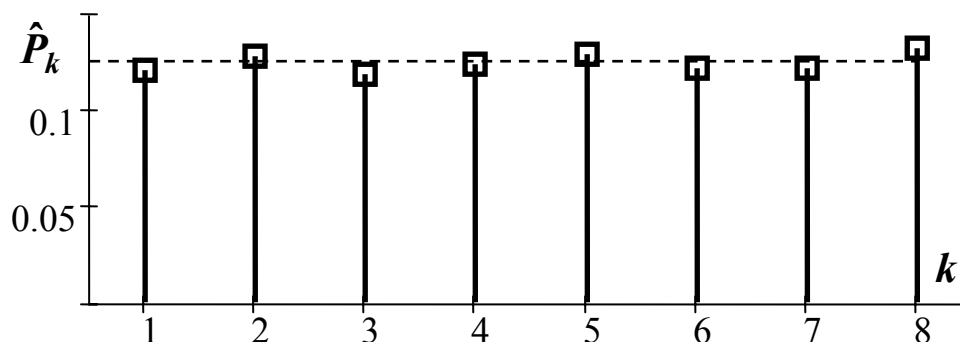


Рис. 4.5. Эмпирическое распределение случайной величины «номер опыта»

Таблица 4.4

Случайные числа

1643	5457	4284	6847	4727	5845	3264	4585	2145	8136
8626	2575	2816	5268	6354	1645	5236	7146	5165	6584
3863	8416	5341	2517	8263	6781	1658	2685	6527	3286
1312	3845	3427	7214	5834	2767	2126	6253	4653	7342
1245	3781	5262	7423	2353	2715	3867	1618	7612	6785
2748	6783	2827	6483	2736	5648	1463	6186	8457	4635
6431	6374	5717	3581	1634	8457	3784	2381	6517	3235
8612	4631	6254	2851	4653	2537	7413	5478	7854	2576
4836	3271	4875	8327	6585	1326	4735	7241	5861	5237
5481	1327	8562	3813	2465	7573	6416	4328	4673	1524

Г. Проведение эксперимента

ПФЭ проводим в соответствии с порядком после рандомизации, выставляя значения x_1 , x_2 , x_3 (соответствующими тумблерами) равными $x_{i\min}$ или $x_{i\max}$ согласно коду строки («-» или «+»).

В соответствии с каждой строкой плана измеряем выходной параметр y_{iv} для четырех пар транзисторов, переводя переключатель 2 (см. рис. 4.4) в каждое из четырех положений. Данные измерений заносим в столбцы графы «Выходной параметр» табл. 4.3.

Д. Предварительная обработка данных эксперимента

Статистический анализ результатов эксперимента начинаем с проверки гипотезы о воспроизводимости эксперимента.

Воспроизводимостью эксперимента называют свойство повторяемости его данных в серии повторных экспериментов. Поскольку эти данные случайны, то можно говорить лишь о повторяемости некоторых характеристик результатов опытов. Такой характеристикой является построчная дисперсия D_{y_v} , которая не должна существенно изменяться по строкам матрицы ПФЭ. Неоднородность дисперсии воспроизводимости приводит к большим ошибкам вычисления коэффициентов регрессионной модели.

Оценку однородности дисперсии воспроизводимости выполняем по результатам серии параллельных (проводимых в одной и той же точке плана) опытов.

Определяем построчные математические ожидания и дисперсии:

$$my_v = \frac{1}{\gamma} \cdot \sum_{l=1}^{\gamma} y_{lv};$$

$$Dy_v = \frac{1}{\gamma-1} \sum_{i=1}^{\gamma} (y_{iv} - my_v)^2,$$

где $\gamma = 4$ – количество параллельных опытов; $v = 1 \dots 8$ – номер строки матрицы эксперимента X .

Гипотезу о воспроизводимости эксперимента проверяем, используя критерий Кохрена. Для этого рассчитываем величину

$$G = \frac{Dy_{\max}}{\sum_{v=1}^K Dy_v}, \quad (4.12)$$

где Dy_{\max} – максимальная из построчных дисперсий; $K = 8$ – количество строк в матрице эксперимента X .

Значение G сравниваем с квантилем распределения Кохрена $G_{\text{табл}}(\alpha, K, f_1)$, где α – уровень значимости гипотезы о воспроизводимости (вероятность ошибки первого рода); K – количество дублированных строк, $f_1 = \gamma - 1$ – число степеней свободы.

При $\alpha = 0.05$; $f_1 = 3$ и $K = 8$ $G_{\text{табл}} = 0.4377$.

Если $G > G_{\text{табл}}$, то эксперимент невоспроизводим. В этом случае необходимо:

- либо увеличить количество параллельных опытов;
- либо повысить точность измерений параметра y ;
- либо применить к данным нелинейные преобразования вида \sqrt{y} , $\ln(y)$, $\exp(y)$ и т.д.

Если эксперимент воспроизводим, то рассчитываем значение дисперсии воспроизводимости

$$D_y = \frac{1}{K} \cdot \sum_{v=1}^K Dy_v \quad (4.13)$$

и переходим к основной обработке данных, которая состоит в нахождении оценок коэффициентов модели (4.6) и проверке их значимости.

Е. Основная обработка данных эксперимента

При обработке данных по методу наименьших квадратов ортогональность матрицы ПФЭ позволяет получить независимые оценки коэффициентов уравнения регрессии для неполного полинома (т. е. полинома, не имеющего членов, содержащих степени независимых переменных).

Независимость оценок означает, что оценка любого коэффициента не зависит от того, какие значения принимают оценки других коэффициентов.

Рассчитываем оценки коэффициентов a_i :

$$\hat{a}_i = \frac{1}{K} \cdot \sum_{v=1}^K x_{iv} \cdot my_v, \quad i = 0 \dots M - 1, \quad (4.14)$$

где $M = 8$ – количество переменных x_i и коэффициентов a_i модели.

Формула (4.14) – скалярная форма записи решения векторно-матричного уравнения

$$\vec{m}_y = \mathbf{X}^T \cdot \vec{a};$$

откуда

$$\vec{a} = \mathbf{X}^{-1} \cdot \vec{m}_y, \quad (4.15)$$

где \vec{m}_y – вектор построчных математических ожиданий $\{my_v\}$, $v = 1 \dots 8$.

Для расчета оценок коэффициентов модели a_i в Mathcad проще использовать выражение (4.15).

В целях исключения из уравнения регрессии факторов, слабо влияющих на выходной параметр y , проверяем значимость коэффициентов регрессионного полинома. Значимо ли отклонение от «0» того или иного коэффициента a_i определяем по t -критерию Стьюдента

$$t_i = |\hat{a}_i| \cdot \sqrt{\frac{K \cdot \gamma}{D_y}}, \quad (4.16)$$

где K – количество строк плана-матрицы эксперимента; γ – количество параллельных опытов; D_y – дисперсия воспроизводимости.

Полученное значение t_i сравниваем с квантилем распределения Стьюдента $t_{\text{табл}}(\alpha, f_2)$, где α – уровень значимости статистической гипотезы; $f_2 = K \cdot (\gamma - 1)$ – число степеней свободы.

Для расчета $t_{\text{табл}}$ при заданных α (как правило, $\alpha = 0.05$) и f_2 можно использовать функцию Mathcad $qt(P, f_2)$:

$$t_{\text{табл}}(\alpha, f_2) = qt(1 - \alpha/2, f_2), \quad (4.17)$$

где $P = 1 - \alpha/2$ – вероятность правильного решения (для двусторонней критической области).

Например, при $\alpha = 0.05$, $K = 8$, $\gamma = 4$ получим

$$t_\alpha := qt\left(1 - \frac{\alpha}{2}, f_2\right) \quad t_\alpha = 2.064$$

Если $t_i < t_{\text{табл}}$, то i -й коэффициент считаем незначимым и обнуляем, т. е. $a_i = 0$. Значения \hat{a}_i , t_i и $a_{i_{\text{знач}}}$ заносим в табл. 4.3.

Ж. Вычисление значений выходного параметра

Найденные значения коэффициентов $a_{i_{\text{знач}}}$ подставляем в модель (4.11) и рассчитываем величины выходного параметра $\hat{y}_v = \sum_{i=0}^{M-1} b_i x_{vi}$ для каждой строки плана-матрицы эксперимента.

Рассчитанные значения \hat{y}_v записываем в табл. 4.3.

3. Проверка адекватности модели

Модель считается адекватной, если она с достаточной точностью описывает поведение моделируемого объекта.

Проверка адекватности уравнения регрессии основана на сопоставлении рассеяния значений y_{vj} , $v = 1 \dots K$, $j = 1 \dots \gamma$, полученных в результате эксперимента, относительно линии регрессии $\hat{y} = \Phi(\bar{X})$ с рассеянием значений y_{vj} относительно своих математических ожиданий $\{my_v\}$.

Если количество значимых коэффициентов модели d меньше полного количества коэффициентов M , то для определения рассеяния y относительно линии регрессии вычисляем дисперсию адекватности

$$D_A = \frac{1}{M-d} \sum_{v=1}^K (my_v - \hat{y}_v)^2. \quad (4.18)$$

Адекватность проверяем путем сравнения дисперсий адекватности и воспроизводимости по критерию Фишера:

$$F = D_A / D_y. \quad (4.19)$$

Если $F < 1$, то модель адекватна. Иначе сравниваем F с квантилем распределения Фишера $F_{\text{табл}}(\alpha, f_3, f_2)$, где α – уровень значимости гипотезы об адекватности; $f_3 = M - d$ и $f_2 = K \cdot (\gamma - 1)$ – степени свободы.

Для расчета квантиля $F_{\text{табл}}$ при заданном уровне значимости α (обычно $\alpha = 0.05$) и известных степенях свободы f_3 , f_2 можно использовать функцию Mathcad $qF(P, f_3, f_2)$, где $P = 1 - \alpha$ – вероятность правильного решения:

$$F_{\text{табл}}(\alpha, f_3, f_2) = qF(1 - \alpha, f_3, f_2). \quad (4.20)$$

Например, при $\alpha = 0.05$, $K = M = 8$, $d = 6$ и $\gamma = 4$ получим

$$F_\alpha := qF(1 - \alpha, f_3, f_2) \quad F_\alpha = 3.403$$

Если $F < F_{\text{табл}}$, то гипотезу об адекватности принимают.

Если число значимых коэффициентов равно их полному количеству, то вычисляем относительные ошибки выходного параметра

$$\delta_y = \frac{|my_v - \hat{y}_v|}{my_v} \cdot 100\%, \quad (4.21)$$

выбираем максимальную величину δ_{\max} , которую сравниваем с допустимым значением относительной ошибки $\delta_{\text{доп}}$, например, $\delta_{\text{доп}} = 5\%$.

Если $\delta_{\max} < \delta_{\text{доп}}$, то модель считаем адекватной.

И. Выводы

На основе результатов проверки адекватности (п. **З**) делаем выводы о применимости (или неприменимости) полученной модели (регрессионного полинома первой степени) для данного объекта.

Добиться адекватности линейной модели можно с помощью нелинейного преобразования функции отклика.

Порядок выполнения работы

1. Получить у преподавателя задание на исследование одного из параметров выходного сигнала мультивибратора.
2. Включить лабораторный стенд и убедиться в наличии установившегося режима генерации мультивибратора.
3. В соответствии с п. **А** провести предварительный эксперимент и выбрать три первичных фактора из восьми.
4. В соответствии с п. **В** спланировать ПФЭ.
5. Провести ПФЭ, дублируя каждую строку плана четыре раза (п. **Г**).
6. В соответствии с п. **Д** выполнить предварительную обработку данных, обеспечив (при необходимости) их воспроизводимость путем нелинейного преобразования отклика.
7. Выполнить основную обработку данных (п. **Е**), получив модель в виде регрессионного полинома со значимыми коэффициентами.
8. В соответствии с п. **З** проверить адекватность модели.

Содержание отчета

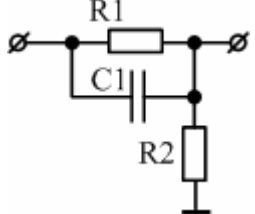
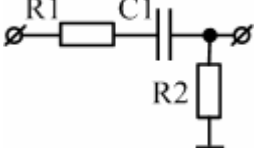
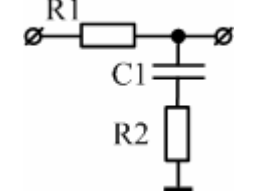
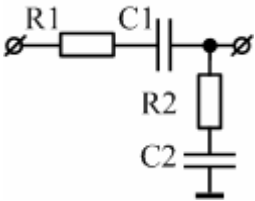
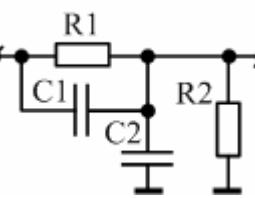
Отчет о лабораторной работе должен содержать:

- таблицу с результатами предварительного эксперимента;
- таблицу плана ПФЭ с результатами планирования, данными эксперимента и результатами обработки данных;
- основные расчетные соотношения отдельных этапов методики и результаты расчетов;
- выводы по определяющим пунктам методики;
- итоговую регрессионную модель.

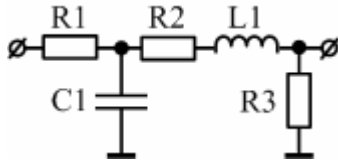
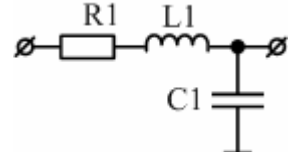
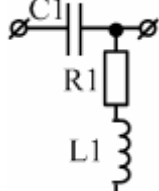
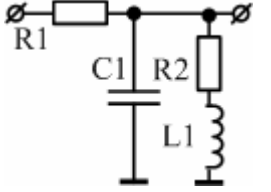
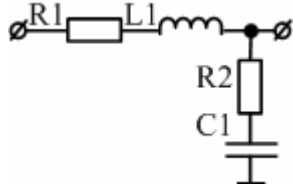
Контрольные вопросы

1. В чем состоит основная задача оптимального эксперимента?
2. Чем активный эксперимент отличается от пассивного?
3. Что собой представляет регрессионная модель?
4. Что называют планом эксперимента?
5. Что такое рандомизация опытов и для чего ее выполняют?
6. Чем определяется выбор уровней варьирования и интервалов варьирования факторов?
7. В чем заключается полный факторный эксперимент? Какую модель он позволяет получить?
8. Как определить значимость влияния тех или иных факторов и необходимость их учета при исследовании конкретной системы?
9. Как перейти от фактического значения параметра к нормированному и для чего выполняют нормировку?
10. Известны допустимые значения параметра, например, $x = 100 \pm \pm 20 \%$. По заданным нормированным значениям $x' = \{-0.6; -0.4; 0.2; 0.5\}$ рассчитайте фактические значения параметра x .
11. Как построить план-матрицу X эксперимента? Какими свойствами эта матрица обладает?
12. Что такое воспроизводимость эксперимента?
13. Каким образом можно проверить воспроизводимость и что следует предпринять, если эксперимент невоспроизводим?
14. Что означает значимость коэффициента регрессионной модели и как ее оценить?
15. Что может являться причиной незначимости коэффициента a_i ?
16. В чем состоит суть понятия «адекватность модели»?
17. Как проверить, является ли построенная модель адекватной?
18. Как в лабораторном макете имитируют разброс значений параметров и влияние помехи?
19. Пусть по результатам ПФЭ получены оценки коэффициентов регрессионной модели $y = \Psi(x_1, x_2)$: $a_0 = 20$, $a_1 = 10$, $a_2 = -4$, $a_3 = 5$. Заданы допустимые области значений переменных: $x_1 = 100 \pm 20 \%$, $x_2 = 500 \pm 10 \%$. Найдите с помощью модели значение y , если фактические значения переменных $x_1 = 106$, $x_2 = 460$.
20. Пусть по результатам ПФЭ получены оценки коэффициентов регрессионной модели $y = \Psi(x_1, x_2)$: $a_0 = 2.5$, $a_1 = 1$, $a_2 = -0.25$, $a_3 = 0.1$. Известно, что количество параллельных опытов, проводимых для каждой строки плана эксперимента, равно 10, а оценка дисперсии воспроизводимости $D_y = 0.4$. Оцените значимость коэффициентов a_i .

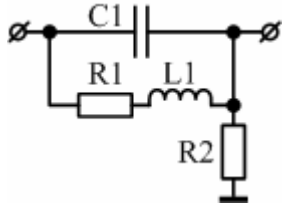
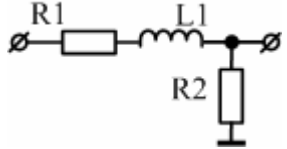
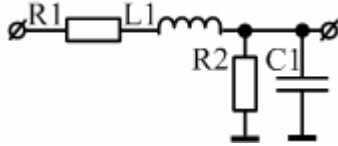
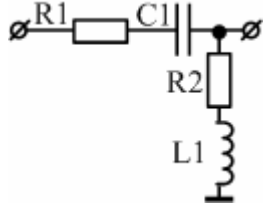
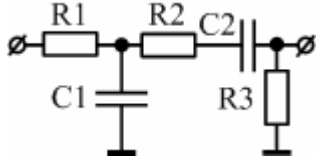
ЭЛЕКТРИЧЕСКИЕ И МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ ОБЪЕКТОВ

Номер варианта	Электрическая модель объекта	Передаточная функция объекта	Параметры
1		$K(p) = \frac{pR_1R_2C_1 + R_2}{pR_1R_2C_1 + R_1 + R_2}$	$R_1 = 10000$ $R_2 = 1000$ $C_1 = 4.7 \cdot 10^{-6}$
2		$K(p) = \frac{pR_2C_1}{p(R_1 + R_2)C_1 + 1}$	$R_1 = 10$ $R_2 = 1000$ $C_1 = 10^{-6}$
3		$K(p) = \frac{pR_2C_1 + 1}{p(R_1 + R_2)C_1 + 1}$	$R_1 = 10000$ $R_2 = 1000$ $C_1 = 4.7 \cdot 10^{-7}$
4		$K(p) = \frac{pR_2C_1 + 1}{p(R_1 + R_2)C_2 + \frac{C_2}{C_1} + 1}$	$R_1 = 3000$ $R_2 = 10$ $C_1 = 10^{-5}$ $C_2 = 0.68 \cdot 10^{-6}$
5		$K(p) = \frac{pR_1R_2C_1 + R_2}{pR_1R_2(C_1 + C_2) + R_1 + R_2}$	$R_1 = 1000$ $R_2 = 100$ $C_1 = 47 \cdot 10^{-6}$ $C_2 = 68 \cdot 10^{-8}$

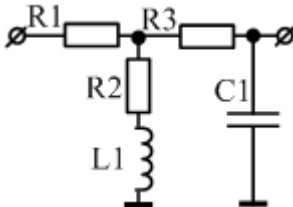
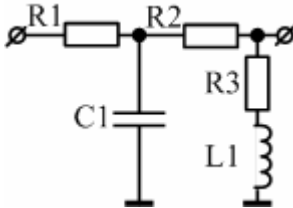
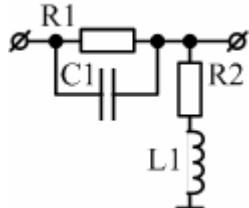
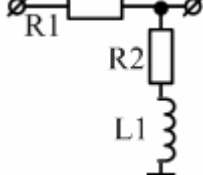
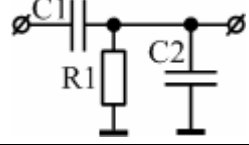
Продолжение приложения

Номер варианта	Электрическая модель объекта	Передаточная функция объекта	Параметры
6		$K(p) = \frac{R_3}{\{p^2 R_1 C_1 L_1 + p[(R_2 + R_3)R_1 C_1 + L_1] + R_2 + R_3\}}$	$R_1 = 5100$ $R_2 = 2$ $R_3 = 1000$ $C_1 = 10^{-6}$ $L_1 = 10^{-3}$
7		$K(p) = \frac{1}{p^2 C_1 L_1 + p R_1 C_1 + 1}$	$R_1 = 1$ $C_1 = 10^{-4}$ $L_1 = 10^{-2}$
8		$K(p) = \frac{p^2 C_1 L_1 + p R_1 C_1}{p^2 C_1 L_1 + p R_1 C_1 + 1}$	$R_1 = 5.1$ $C_1 = 10^{-4}$ $L_1 = 10^{-2}$
9		$K(p) = \frac{p L_1 + R_2}{p^2 R_1 C_1 L_1 + p(R_1 R_2 C_1 + L_1) + R_1 + R_2}$	$R_1 = 5.1$ $R_2 = 0.1$ $C_1 = 68 \cdot 10^{-6}$ $L_1 = 10^{-2}$
10		$K(p) = \frac{p R_2 C_1 + 1}{p^2 C_1 L_1 + p(R_1 + R_2)C_1 + 1}$	$R_1 = 2$ $R_2 = 1$ $C_1 = 10^{-5}$ $L_1 = 10^{-2}$

Продолжение приложения

Номер варианта	Электрическая модель объекта	Передаточная функция объекта	Параметры
11		$K(p) = \frac{p^2 R_2 C_1 L_1 + p R_1 R_2 C_1 + R_2}{p^2 R_2 C_1 L_1 + p(R_1 R_2 C_1 + L_1) + R_1 + R_2}$	$R_1 = 1$ $R_2 = 18$ $C_1 = 10^{-4}$ $L_1 = 10^{-2}$
12		$K(p) = \frac{R_2}{p L_1 + R_1 + R_2}$	$R_1 = 1$ $R_2 = 10$ $L_1 = 10^{-2}$
13		$K(p) = \frac{R_2}{p^2 R_2 C_1 L_1 + p(R_1 R_2 C_1 + L_1) + R_1 + R_2}$	$R_1 = 2$ $R_2 = 10^3$ $C_1 = 10^{-4}$ $L_1 = 10^{-2}$
14		$K(p) = \frac{p^2 C_1 L_1 + p C_1 R_2}{p^2 C_1 L_1 + p C_1 (R_1 + R_2) + 1}$	$R_1 = 6.8$ $R_2 = 1$ $C_1 = 10^{-6}$ $L_1 = 10^{-2}$
15		$K(p) = \frac{p R_3 C_2}{\{p^2 R_1 C_1 C_2 (R_2 + R_3) + p[(R_2 + R_3) C_2 + R_1 C_2] + 1\}}$	$R_1 = 8200$ $R_2 = 1$ $R_3 = 10^3$ $C_1 = 10^{-7}$ $C_2 = 3.3 \cdot 10^{-6}$

Окончание приложения

Номер варианта	Электрическая модель объекта	Передаточная функция объекта	Параметры
16		$K(p) = \frac{pL_1 + R_2}{\{p^2 R_3 C_1 L_1 + p[(R_1 + R_2)R_3 C_1 + L_1] + R_1 + R_2\}}$	$R_1 = 1$ $R_2 = 0.1$ $R_3 = 10^3$ $C_1 = 10^{-6}$ $L_1 = 10^{-2}$
17		$K(p) = \frac{pL_1 + R_3}{\{p^2 R_1 C_1 L_1 + p[(R_2 + R_3)R_1 C_1 + L_1] + R_2 + R_3\}}$	$R_1 = 10^4$ $R_2 = 1$ $R_3 = 0.1$ $C_1 = 10^{-7}$ $L_1 = 10^{-2}$
18		$K(p) = \frac{p^2 R_1 C_1 L_1 + p(R_1 R_2 C_1 + L_1) + R_2}{p^2 R_1 C_1 L_1 + p(R_1 R_2 C_1 + L_1) + R_1 + R_2}$	$R_1 = 1000$ $R_2 = 1$ $C_1 = 47 \cdot 10^{-6}$ $L_1 = 10^{-2}$
19		$K(p) = \frac{pL_1 + R_2}{pL_1 + R_1 + R_2}$	$R_1 = 10$ $R_2 = 2$ $L_1 = 5 \cdot 10^{-2}$
20		$K(p) = \frac{pR_1 C_1}{pR_1(C_1 + C_2) + 1}$	$R_1 = 10^3$ $C_1 = 10^{-7}$ $C_2 = 3.3 \cdot 10^{-6}$

Библиографический список

1. Бабаков, М. Ф. Методы машинного моделирования в проектировании электронной аппаратуры [Текст] : учеб. пособие / М. Ф. Бабаков, А. В. Попов. – Х. : Нац. аэрокосм. ун-т "Харьк. авиац. ин-т", 2002. – 89 с.
2. Бабаков, М. Ф. Математические модели электронных аппаратов и систем [Текст] : учеб. пособие / М. Ф. Бабаков, А. В. Попов, М. И. Луханин. – Х. : Нац. аэрокосм. ун-т "Харьк. авиац. ин-т", 2003. – 109 с.
3. Бабаков, М. Ф. Теоретические основы конструирования, технологии и надежности электронных средств [Текст] : учеб. пособие по лаб. практикуму / М. Ф. Бабаков, А. В. Попов. – Х. : Нац. аэрокосм. ун-т "Харьк. авиац. ин-т", 2000. – 167 с.
4. Бендат, Дж. Прикладной анализ случайных данных [Текст] : пер. с англ. / Дж. Бендат, А. Пирсол; под ред. И. Н. Коваленко. – М. : Мир, 1989. – 540 с.
5. Вентцель, Е. С. Теория вероятностей и ее инженерные приложения [Текст] / Е. С. Вентцель, Л. А. Овчаров. – М. : Высш. шк., 2000. – 480 с.
6. Гмурман, В. Е. Теория вероятностей и математическая статистика [Текст] : учеб. пособие для вузов / В. Е. Гмурман. – М. : Высш. шк., 2000. – 479 с.
7. Кофанов, Ю. Н. Теоретические основы конструирования, технологии и надежности радиоэлектронных средств [Текст] : учебник для вузов / Ю. Н. Кофанов. – М. : Радио и связь, 1983. – 310 с.
8. Крянев, А. В. Математические методы обработки неопределенных данных [Текст] / А. В. Крянев, Г. В. Лукин. – М. : ФИЗМАТЛИТ, 2003. – 216 с.
9. Львович, Я. Е. Теоретические основы конструирования, технологии и надежности РЭА [Текст] : учеб. пособие для вузов / Я. Е. Львович, В. Н. Фролов. – М. : Радио и связь, 1986. – 192 с.
10. Половко, А. М. Mathcad для студента [Текст] / А. М. Половко, И. В. Ганичев. – СПб. : БХВ-Петербург, 2006. – 336 с.
11. Яншин, А. А. Теоретические основы конструирования, технологии и надежности ЭВА [Текст] : учеб. пособие для вузов / А. А. Яншин. – М. : Радио и связь, 1983. – 312 с.

СОДЕРЖАНИЕ

Лабораторная работа № 1. Исследование моделей внезапного и деградационного отказов	3
Лабораторная работа № 2. Определение полей допусков на выходные параметры и элементы электронных средств методом статистического моделирования	25
Лабораторная работа № 3. Методы цифрового статистического моделирования безотказности сложных объектов	42
Лабораторная работа № 4. Построение регрессионных моделей объектов. Активный оптимальный эксперимент	60
Приложение. Электрические и математические модели объектов	78
Библиографический список	82

Навчальне видання

Бабаков Михайло Федорович
Васильєва Ірина Карлівна
Попов Анатолій Владиславович

**ФІЗИКО-ТЕОРЕТИЧНІ ОСНОВИ ПРОЕКТУВАННЯ
РАДІОЕЛЕКТРОННИХ ЗАСОБІВ**

(Російською мовою)

Редактор В. М. Коваль

Зв. план, 2015

Підписано до друку 25.12.2015

Формат 60×84 1/16. Папір офс. № 2. Офс. друк

Ум. друк. арк. 4,7. Обл.-вид. арк. 5,25. Наклад 100 пр.

Замовлення 244. Ціна вільна

Видавець і виготовлювач

Національний аерокосмічний університет ім. М. Є. Жуковського

"Харківський авіаційний інститут"

61070, Харків-70, вул. Чкалова, 17

<http://www.khai.edu>

Видавничий центр "ХАІ"

61070, Харків-70, вул. Чкалова, 17

izdat@khai.edu

Свідоцтво про внесення суб'єкта видавничої справи
до Державного реєстру видавців, виготовлювачів і розповсюджувачів
видавничої продукції сер. ДК № 391 від 30.03.2001